T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİR GEOMETRİDE CASİMİR ETKİ

DEMET ÖLMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN

2010

EDİRNE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİR GEOMETRİDE CASİMİR ETKİ

DEMET ÖLMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 05./.08./ 2010 tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan AKBAŞ
(Üye)

Yrd. Doç. Deniz AĞIRSEVEN
(Üye)

Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN
(Danışman)

ÖZET

Bu çalışmada silindir geometride elektromagnetik alanın Casimir etkisi yeniden göz önüne alınmıştır. Sonsuz katı silindirdeki elektromagnetik alanın Casimir enerjisi öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrali ile doğrudan modların toplamı kullanılarak elde edilmiştir. ε_1 ve μ_1'den yapılmış silindir ve onun çevresini oluşturan malzemenin ε_2 ve μ_2 dielektrik ve magnetik özelliklere sahip olduğu varsayılmıştır.

$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$ (c ortamdaki ışık hızıdır.)

koşulu sağlandığında içerdeki ve dışardaki modlardaki tüm ıraksamalar birbirlerini yok eder. Bu ıraksamalar Zeta fonksiyon teknikleri kullanılarak regülarize edilir. a yarıçaplı silindirik kabuk için elektromagnetik alanın Casimir enerjisini negatif işaretli olarak bulunur. Silindir geometri için Casimir enerji hem etki ve işareti arasındaki karşılığının anlaşılmasında hem de eş merkezli iki silindir arasındaki alanın Casimir enerjisini doğrulamada anahtar oluşturacağından ilginç kabul edilir.

ABSTRACT

We reconsider the electrodynamic Casimir effect for the cylindrical geometry. The Casimir energy of a electromagnetic field subject to the infinite solid cylinder are calculated by using a direct mode summation with contour integration in the complex plane of eigenfrequencies. It is assumed that the dielectric and magnetic characteristics of the material which makes up the cylinder (ε_1, μ_1) and surrounding of the cylinder has (ε_2, μ_2) material. When $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$ (where c is the speed of the light in media) this condition is satisfied, all divergences cancel between interior and exterior modes. Those divergences are regulated by employing the Zeta function techniques. We have obtained the negative sign of the Casimir energy of the electromagnetic field for the cylindirical shell of radius a. The Casimir energy for cylindirical geometry is regarded as interesting both to understand the correspondance between the sign of the effect and as a key to confirming the Casimir energy between two concentric cylinders.

TEŞEKKÜRLER

Bu tez çalışmasının her adımında tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller üzerinde şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Mustafa ÖZCAN'a ve manevi desteklerini esirgemeden her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜRLER v

1. GİRİŞ 1

2. ELEKTROMANYETİK ALANIN MODLARI 9

2.1 Hertz Vektörü 10

3. SİLİNDİR GEOMETRİDE CASİMİR ETKİ 23

SONUÇ 47

KAYNAKLAR 50

EK-A 52

EK-B 67

ÖZGEÇMİŞ

1.GİRİŞ

İlk defa 1948'de Hollandalı fizikçi H.G.B Casimir yüksüz ideal iletken iki paralel düzlemle sınırlandırılmış elektromagnetik alanın kuantum sıfır nokta enerjisini hesapladı[*Casimir*,1948]. Casimir'in bulduğu sonuç: evrenin herhangi bir yerinde madde veya parçacığın ya da hiçbir şeyin olmadığı yerde, boş uzayın her hacminde büyük miktarda enerji içerdiğinin kuantum mekaniksel öngörüsünün sonucuydu. Casimir düzlemlerle sınırlandırılmış elektromanyetik alanın kuantum boşluk enerjisinin çekici kuvvet ürettiğini buldu. Bu çekici kuvvet $\hbar$ Planck sabiti, c ışık hızı ve a levhalar arasındaki uzaklık olmak üzere

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 a^4} \tag{1.1.1}$$

şeklindedir. Bu çekici kuvvet elektrik yükü gibi değerlerden bağımsızdır. Daha sonra M.J. Sparnaay [*Sparnaay*,1958] ve D. Tabor [*Tabor ve Winterton*,1969], 1958'de bu çekici kuvveti deneysel olarak gözlemlediler. Son zamanlarda yapılan deneylerde [*Lamoreaux*,1997] yüksüz paralel levhalarla sınırlandırılmış alanın boşluk enerjisinin çekici kuvvet ürettiği yeniden gözlemlenmiştir. Çekici kuvvetin büyüklüğü yapılan deneylerde görüldüğü gibi 1cm^2 alan başına $1\,\mu$m uzaklıkta 1.3×10^{-7} N'dur. Bu kuvvetin büyüklüğü her ne kadar küçük olsa bile günümüz modern laboratuvarlarında ölçümler yapılmaktadır. Bu durum Casimir etkinin nanoteknoloji ve nano elektro mekaniksel aletlerin uygulama alanları için seçkin bir yer hazırlamaya adaydır.

Casimir etki: bize aslında boşluğun boş olmadığını, hiçbir şeyin olmadığı yerde gerçekte geri zeminde elektromanyetik alanın bulunduğu ve bu alanın enerjisinin sonsuz olduğu ve bu boşluğa paralel iki düzlemi bandırdığımızda geri zemindeki elektromanyetik alanın modları bu boşluğu bölen paralel düzlemler aracılığı ile yeniden şekillendiğini, kimi modların düzlemlerin arasında yer aldığını, kimi modların ise düzlemleri delerek salınımlarına devam ettiğini söyler. Bu noktada düzlemlerle sınırlandırılmış

elektromagnetik alanın sıfır-noktasındaki ışınım basıncı Casimir kuvvetin kaynağını teşkil eder. Bu aynı zamanda kuantize edilmiş alanların boşluk enerjisi ya da vakum enerjisinin ölçülebilir sonucudur. Bu etki ciddiye alınacak ölçüde önemlidir.

Casimir etki temelde kuantize edilmiş alanların boşluk enerjisinin polarizasyonu olarak da söylenir. Boşluk enerjisinin farkının değeri alandan alana, geometriden geometriye ve boyuttan boyuta değişmektedir [*Özcan*, 2006]. Casimir'in elde ettiği sonuçların hemen ardı sıra küresel kabukla sınırlandırılmış elektromagnetik alanın sıfır nokta enerjisi T.H. Boyer [*Boyer*,1970] tarafından pozitif değerli ve küresel kabuğun yarıçapına bağlı olarak elde edilmiştir. Bu pozitif enerjinin anlamı küresel kabuğun üzerinde itici bir kuvvet ürettiğidir. Boyer'in sonuçları eksponansiyel kesici fonksiyonların seçimine bağlı olduğundan, ortaya çıkan kimi sonsuzlukların yok edilmesi için Boyer'in [*Boyer*,1970] çalışmasında oldukça karmaşık yollar geliştirilmiştir. Daha sonra K.A. Milton ve arkadaşları [*Milton vd*.,1978] Boyer'in küresel kabuğun Casimir enerjisini Green's fonksiyon yöntemini kullanarak Boyer'in hesaplarından tamamen bağımsız olarak yeniden pozitif enerjiyi elde edilmişlerdir. Milton'ın bulduğu sonuç kesici fonksiyonlardan bağımsızdır. 1998-99 yıllarında Nesterenkove Hagen [*Nesterenko ve Pirozhenko*,1998] [*Bowes veHagen*,1999] çalışmalarında görüleceği gibi elektromagnetik alanın küresel kabuk için kuantum boşluk enerjisi, modların toplamı metodunu kontur integrasyonu ile yeniden K.A. Milton [*Milton vd*.,1978] bulduğu sonuç elde edilmiştir.

Bu sonuçlardan anlaşılacağı gibi paralel düzlemler ve küresel kabuğun Casimir enerjisi işareti birbirinden farklıdır. Casimir enerji, paralel düzlemlerde çekici kuvvet, küresel kabukta ise itici kuvvet üretmektedir. Bu işaret farkı Casimir'in öngördüğü elektron modeli ile tamamen çelişmektedir. Casimir paralel levhalarda üretilen çekici kuvvetin aynısını küresel kabuk için de öngörerek elektron modeli kuracağını ümit etmişti. Kimi bilim adamaları ise paralel levhalarda negatif, küresel kabukta pozitif Casimir enerji üretiliyorsa silindir kabukta da sıfır olacağını öngördüler. Fakat yapılan çalışmalar bize ideal küresel iletken silindir kabuğun Casimir enerjisinin işaretinin paralel düzlemde olduğu

gibi negatif olduğunu gösterdi $[DeRaad\,ve\,Milton,1981,DeRaad,1985]$. Şöyle ki oluşan kuvvetler

$$F_{levha} = -\frac{0.0411}{a^4}$$

$$F_{küre} = \frac{0.003674}{a^4} \qquad (1.1.2)$$

$$F_{silindir} = -\frac{0.003674}{(2a)^4}$$

olarak bulunmuştur. Casimir enerjinin değerinin geometriden geometriye, topolojiden topolojiye, boyuttan boyuta bağlı olarak şekillendiği anlaşılmaktadır.

Casimir boşluk enerjisi hesaplarında genel anlamda ortak kabul görmüş bir yönteme sahip değiliz. Dolayısıyla farklı sistemlerde farklı sonuçlar üreten Casimir boşluk enerjisi çalışmaları çok hassas bir zeminde ve herkes tarafından kabul gören matematiksel teknikler kullanılarak elde edilmelidir.

Casimir enerji hesaplarında doğası gereği ürettiği sonlu ifadeleri matematiksel olarak sonsuz ifadelerin içinden elde ederiz. Sonsuzlukları belirlemeye regülarizasyon, sonsuzlukları dışarı çıkarmaya da renormalizasyon denir. Matematiksel olarak yegane regülarizasyon yöntemine sahip değiliz. Bu bize regülarizasyon yöntemlerinin sorgulanmasını da beraberinde getirir.

Bu çalışmada elektromagnetik alanın silindir simetriye sahip geometrilerde kuantum boşluk enerjisini, kontur integrali ile modların toplamı yöntemi kullanılarak yeniden elde edeceğiz. Öncelikle bir biçim ortamın içerisine gömülmüş sonsuz uzunluktaki katı silindirin Casimir enerjisini çıkartacağız. Dielektrik ve magnetik geçirgenlik katsayıları ε_2 ve μ_2 olan bir biçim sistemin içerisine dielektrik ve magnetik geçirgenlik katsayıları ε_1 ve μ_1 olan silindir gömülerek elde edilen yapıyla sınırlandırılmış elektromagnetik alanın kuantum boşluk enerjisinin integral temsilleri çıkartacağız. Burada

$$\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 = \frac{1}{c^2} \tag{1.1.3}$$

kabul edeceğiz. Bu koşul sağlandığı zaman sistemin bütününde ortaya çıkan sonsuzluklar iç ve dıştaki modların ürettikleri sonsuzluklar aracılığıyla yok olur. Sonsuzluklar da Zeta fonksiyon tekniği uygulanarak regülarize edilir. Ayrıca özel bir uygulama olarak $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ve $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ seçimi yapılarak silindir kabuğun Casimir enerjini hesaplayacağız. Silindir simetriye sahip geometrinin seçilmesi sonsuzlukların regülarize edilmesi ve onların atılması konusunda bize oldukça önemli bir yöntem örneği sunmaktadır. Bununla beraber Casimir enerji için silindir simetriye sahip geometrinin seçilmesi birbirlerine çok yakın iki düzlem arasına sıkıştırılmış elektromagnetik alanların Casimir enerjisinin hesaplanmasında ve tanımlanmasında anahtar rol teşkil edecektir $[\ddot{O}zcan, 2005]$.

Silindir simetride karşımıza çıkan sonsuzlukların ayıklanma tecrübesi diğer yöntemlerde elde edilen sonsuzlukların ayıklanması ve sonlu çözümlerin bulunması için bir yöntem oluşturacaktır. Silindir geometride kontur integral yöntemiyle modların toplamı kullanılarak göz önüne aldığımız Casimir enerji hesapları teknik olarak bize yeni regülarize teknikleri geliştirmeyi sunmaktadır.

Şimdi kuantum boşluk enerjisi çalışmalarımızda alanların temel yapılanmasını oluşturan ifadeleri göz önüne alarak elektromagnetik alanın sıfır nokta enerjisini tartışalım.

Elektromagnetik alan bileşenlerinin 2. dereceden antisimetrik tensör şekli $F_{\mu\nu}$ ile tanımlanır. $F_{\mu\nu}$'nin $A^{\mu} = (\varphi, \vec{\mathrm{A}})$ vektör potansiyeli ile arasındaki ilişki

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}, \ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.1.4}$$

şeklinde verilir. $\left(\vec{\dot{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt}\right)$ Buradan da $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\dot{B}}$ ve $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ Maxwell denklemlerinden ikisini elde ederiz. Diğer iki Maxwell denklemleri yük ve akım kaynağının olmadığı bir ortamda

$$\frac{\partial \dot{F}^{\mu\nu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} = 0 \text{ veya } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ ve } \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{\dot{E}} \tag{1.1.5}$$

denklemleriyle ifade edilirler. Ayrıca tüm alan bileşenlerini kapsayan denklem de $\Box F_{\mu\nu} = 0$ şeklinde yazılır. Ayar dönüşümleri altında verilen herhangi bir $F_{\mu\nu}$ alan kuvveti birbirinden farklı bir çok potansiyelden meydana gelir. Vektör potansiyelinin serbest ayar seçimi

$$\tilde{A}_{\mu} = A_{\mu} + \frac{\partial \dot{\Lambda}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \tag{1.1.6}$$

denklemiyle ifade edilir. Burada Λ; uzaysal koordinatlara bağlı keyfi bir fonksiyondur. Eğer A_{μ},

$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \dot{A}_{\mu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} - \frac{\partial \dot{A}_{\nu}}{\partial \dot{x}^{\mu}}$ denklemini sağlıyorsa $\tilde{A}_{\mu}$ de bu denklemi sağlamalıdır. $\frac{\partial \dot{F}^{\mu\nu}}{\partial \dot{x}^{\nu}} = 0$ denkleminden Lagrange'yi türetmek için; bu denklemi δA_{μ} değeri ile çarpıp (t_1, t_2) aralığında tüm uzay üzerinden integralini alarak elde ederiz $\left[Bjorken\ ve\ Drell, 1965\right]$. Bu durumda kaynaksız alanın Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(E^2 - B^2\right) \tag{1.1.7}$$

olarak bulunur. Hamiltonyen ifademiz

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(E^2 - B^2\right) \tag{1.1.8}$$

şeklindedir. Lagrangeden oluşan birleşik alanlar

$\Pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu})}$ denkleminden türetilir. (1.1.9)

Uzayın zaman bileşeni $\Pi^0 = 0$ şeklinde iken diğer uzaysal bileşenler elektrik alanla çakışır. Bu durumda eşlenik momenti

$$\Pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \partial^0 A^k - \partial^k A^0 = E^k \tag{1.1.10}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi A^{μ} ve Π^k arasındaki komütasyon bağıntılarını yazalım.

$$\left[\hat{A}_i(x,t), \hat{A}_j(x',t)\right] = \left[\hat{\Pi}^k(x,t), \hat{\Pi}^j(x',t)\right] = 0$$

$$\left[\hat{\Pi}^k(x',t), \hat{A}^0(x,t)\right] = 0 \tag{1.1.11}$$

eşlenik moment $\hat{\Pi}^k(x,t)$ ve $\hat{A}_j(x',t)$ potansiyelleri arasındaki eş zamanlı komütatörler için

$$\left[\Pi^i(x,t), \hat{A}_j(x',t)\right] = -\left[E^i(x,t), \hat{A}_j(x',t)\right] = -i\delta_{ij}\delta^3(x-x') \tag{1.1.12}$$

şeklinde bir ifade yazabiliriz. Bu denklemdeki son ifademiz Maxwell denklemleriyle uyumlu olmadığından $-i\delta_{ij}\delta^3(x-x')$ yerine $-i\delta_{ij}\delta^3(x-x') = i\delta^{tr}_{ij}(x-x')$ denklemindeki karşılığı kullanılır.

Şimdi $\hat{\vec{A}}$ ve $\hat{\vec{\Pi}}$ alanlarını Fourier serisiyle ifade edelim

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{k,\lambda} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} \hat{q}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}(t) e^{i\vec{k}.\vec{x}} \text{ ve } \dot{A}(x,t) = \sum_{k,\lambda} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} \hat{q}_{\boldsymbol{-k}}^{(\lambda)}(t) e^{i\vec{k}.\vec{x}} \tag{1.1.13}$$

$\vec{\varepsilon}(k,\lambda)$ ve $\vec{k}$, $\lambda = 1,2$ için iki ortogonal birim vektördür. Yani $\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{k} = 0$'dır. Aynı zamanda her bir $\vec{k}$ birim vektörü için

$\vec{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\vec{\varepsilon}(k,\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$ şeklinde yazılır. Yüksüz skaler alan durumunda $\vec{A}$ ve $\dot{\hat{A}}$'nin hermityeni

$$\vec{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\hat{q}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}(t)=\vec{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\hat{q}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)^+},\vec{\varepsilon}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\hat{p}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)^+}(t)=\vec{\varepsilon}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}\hat{p}_{-\boldsymbol{k}}^{(\lambda)} \tag{1.1.14}$$

bağıntılarını sağlar. Buradaki $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}$ ve $\hat{p}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}$ operatörleri için komütasyon bağıntılarını yazalım.

$$\left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}(t),\hat{p}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')}(t)\right]=\left[\hat{p}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}(t),\hat{p}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')}(t)\right]=0$$

$$\left[\hat{q}_{\boldsymbol{k}}^{(\lambda)}(t),\hat{p}_{\boldsymbol{k}'}^{(\lambda')}(t)\right]=i\delta_{\lambda\lambda}\delta_{kk'} \tag{1.1.15}$$

Şimdi elektromagnetik alanın Hamiltonyenini yeniden yazarsak

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\int d^3x(E^2+B^2)=\frac{1}{2}\sum_{k,\lambda}\left\{\hat{p}_k^{(\lambda)+}\hat{p}_k^{(\lambda)}+\omega^2\hat{q}_k^{(\lambda)+}\hat{q}_k^{(\lambda)}\right\} \tag{1.1.16}$$

$\hat{c}_k^{(\lambda)+}$ ve $\hat{c}_k^{(\lambda)}$ yaratıcı ve yok edici operatörlerimiz

$$\hat{c}_k^{(\lambda)}=\sqrt{\frac{1}{2}\omega_k}\left\{\hat{q}_k^{(\lambda)}+\frac{i}{\omega_k}\hat{p}_k^{(\lambda)+}\right\} \tag{1.1.17}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu ifadenin $\left[\hat{c}_k^{(\lambda)},\hat{c}_k^{(\lambda)+}\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}$ şeklindeki komütasyon bağıntısı, foton sayı operatörlerindeki $\hat{n}_k^{(\lambda)}=\hat{c}_k^{(\lambda)+}\hat{c}_k^{(\lambda)}$ tanımını ortaya çıkarır.

Böylece $\hat{H}=\sum_{k,\lambda}\omega_k\left\{\hat{n}_k^{(\lambda)}+\frac{1}{2}\right\}$ olur. (1.1.18)

Kuantize edilmiş elektromagnetik alan boşluğu $\hat{c}_k^{(\lambda)}\left|0\right\rangle$ olarak tanımlıdır. Sonuç olarak , kuantize edilmiş kaynaksız elektromagnetik alan aynı zamanda sonsuz sıfır nokta enerjisi taşır. Bu durumda enerjiyi

$$E_0=\langle 0\left|\hat{H}\right|0\rangle=\frac{1}{2}\sum_k\omega_k \tag{1.1.19}$$

şeklinde tanımlarız [*Plunien vd*.,1986].

Bu çalışmada ilk olarak silindir geometride yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjiyi modların toplamı yöntemi ile elde etmek için Casimir enerjiyi oluşturan modların nasıl hesaplanacağı tartışılacak. Dielektirik ve magnetik geçirgenlik katsayıları ε_2 ve μ_2 olan ortamın içerisine ε_1 ve μ_1 malzemelerinden yapılmış katı bir silindiri yerleştirdiğimizde oluşan bu yeni geometrinin modlarının dağılımını veren öz frekansları Hertz vektörü tanımı kullanılarak elde edilecek. Bununla beraber silindir geometrinin simetrik yapısından dolayı boş uzayda yazılmış Maxwell denklemlerinde elektrik ve magnetik alanı tanımlayarak sistemin özfrekansları EK-A'da hesaplanacak. Ayrıca silindir ve dışındaki ortam arasında $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$ şartı göz önüne alınarak öz frekans denklemleri ve a yarıçaplı silindir kabuğun öz frekansların dağılımı yine ikinici bölüm başlığı altında yer alacaktır.

Üçüncü bölümde ise bir önceki bölümde elde ettiğimiz modların dağılımını veren denklemlerden hareketle geçirgenlik katsayıları farklı olan ancak modların hızlarının değişmediği ($\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$) bir ortamda silindir simetriye sahip geometride kuantum boşluk enerjisini kontur integral ile modların toplamı yöntemi kullanılarak elde edilmesi tartışılacaktır. Daha sonrada da bu sonuçları kullanarak a yarıçaplı silindir kabuğun enerjisi yeniden elde edilecek $[Milton\ vd.,1999, Nesterenko\ ve\ Pirozhenko,1998]$ $[DeRaad\ ve\ Milton,1981]$.

Not: Bu çalışmada geçen $\hbar$ Planck sabiti $\hbar = 1$ olarak alınmıştır.

2. ELEKTROMANYETİK ALANIN MODLARI

Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerji ((1.1.19) denkleminin öngörüsü ile)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\{p\}}' \left(\omega_p - \overline{\omega}_p \right) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki ω_p gözönüne aldığımız geometrideki elektromagnetik alanın klasik öz frekanslarını temsil eder. $\overline{\omega}_p$ ise hiç bir sınır koşulu olmadan diğer bir deyişle sistemin şeklini belirleyen sınırın sonsuz limitindeki ortamın modlarını temsil eder. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjiyi hesaplayabilmemiz için (2.1) nolu denklemde ifade edilen öz frekansları bulmamız gerekir. Bu bölümde Casimir enerji hesaplarının ana direğini belirleyen modların hesaplanmasını tartışacağız. Öncelikle silindir simetriye sahip a yarıçaplı ve elektrik ve magnetik geçirgenliği ε_1 ve μ_1 olan katı bir cismi, dielektrik ve magnetik geçirgenliği ε_2 ve μ_2 olan bir biçim ortamın içine bandırarak elde edilen sistemin modlarının dağılımını veren öz frekans denklemleri elde edilecek. Elde edilen öz frekans denklemlerinden hareketle, silindir ve dışındaki ortamın geçirgenlik katsayıları arasında $\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 = \frac{1}{c^2}$ bağıntısını gözönüne alarak öz frekansları veren denklemleri bulacağız. Bu bağıntı ortamın farklı malzemeden yapılmasına rağmen elektromagnetik alanın yayılım hızını değiştirmeyecektir. Son olarak; iç ve dış ortamların aynı geçirgenlik katsayılarına sahip silindir kabuğun elektromagnetik modlarının dağılımını veren ifadeleri elde edeceğiz.

2.1 Hertz Vektörü

Şimdi silindir simetriye sahip geometride kaynaksız Maxwell denklemlerini göz önüne alarak alanın dinamiklerini veren vektör denklemlerin çözümlerini Hertz vektörü tanımlarını kullanarak çözelim. Kaynaksız boş uzayda Maxwell denklemleri:

$$1)\ \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

$$2)\ \vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=0 \qquad (2.1.1)$$

$$3)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$4)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ ,\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\ \ ,\ \vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B} \qquad (2.1.2)$$

$\vec{D}$ deplasman vektör, $\vec{\Pi}$ ise Hertz vektör ve $\vec{A}$ vektör potansiyelidir. Vektör potansiyelin Hertz vektörü ile ifadesi

$\vec{A}=\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}$ olarak tanımlanır. $\vec{H}$ ve $\vec{E}$ alanlarını Hertz vektörü cinsinden yeniden yazarsak

$$\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\Pi} \qquad (2.1.3)$$

$$\vec{E}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} \qquad (2.1.4)$$

denklemlerini elde ederiz[*Stratton*,1941]. Elektrik ve magnetik alanı veren Hertz vektörü

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\Pi} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1.5)$$

denklemini sağlamalıdır. Şimdi Hertz vektörü tanımlarını kullanarak elektromagnetik alanın silindir geometrideki bileşenlerini hesaplayalım.

z-yönü boyunca yönlendirilmiş $\vec{\Pi}$ Hertz vektörü $\vec{\Pi} = (0,0,\Psi)$'dir. Burada sıfırdan farklı Hertz vektör bileşenleri

$$\vec{\Pi}_1 = \vec{\Pi}_2 = 0 \ , \ \vec{\Pi}_z \neq 0 \ , \ \vec{\Pi}_z = \Psi \qquad (2.1.6)$$

dir. (2.1.6) denklemini, Hertz vektörü şartını sağlayan denklemde yerine yazarak Hertz vektörünün bileşeni olan

$$\vec{\nabla}^2 \Psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.1.7)$$

skaler alan denklemini elde ederiz. Şimdi silindir koordinatlar kullanılarak

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi(r,\phi,z,t) = 0 \qquad (2.1.8)$$

şeklinde yazılmış (2.1.7) denklemini değişken ayırma yöntemi ile çözüm

$$\Psi(\vec{r},t) = \Psi(r,\phi,z,t)$$

$$= \frac{R(r)}{\lambda^2}\Phi(\phi)Z(z)T(t) \qquad (\lambda^2 = sabit) \qquad (2.1.9)$$

olacak şekilde düzenleriz. ((2.1.8) denk. çözümleri ve Bessel fonksiyonlarının özellikleri EK-A(i)'de ayrıntılarıyla incelenmiştir). Burada $\Phi(\phi)$, Z(z) ve T(t)'yi sağlayan denklemlerin ayrı ayrı çözümlerinin sonucunda

$F_n = e^{in\phi}e^{ikz}e^{-i\omega t}$ bulunur.

(2.1.9) denkleminin radyal kısmına ait olan çözüm

$R(r) = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right]$ olarak bulunur. Böylece (2.1.8) denkleminin çözümü

$$\Psi(r,\phi,z,t) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^i \frac{1}{\lambda^2} J_n(\lambda r) F_n, & r < a \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^e \frac{1}{\lambda^2} H_n^{(1)}(\lambda r) F_n, & r > a \end{cases} \tag{2.1.10}$$

şeklinde a yarıçaplı silindirin iç ve dış bölge çözümlerini verecek şekilde elde ederiz.

$-\infty < k < \infty$, $n = 0,\pm1,\pm2,...$ ve $\lambda^2 = \omega^2\varepsilon\mu - k^2$ 'dir. (2.1.11)

Burada ω'nın ne olduğunu hala bilmiyoruz çünkü ω'yı belirleyecek herhangi bir sınır şartını henüz uygulamadık.

(2.1.10) denklemindeki a_n^i ve a_n^e birer sabit olmak üzere J_n Birinci tür n'inci mertebeden Bessel fonksiyonu $H_n^{(1)}$ ise Üçüncü tür Bessel fonksiyonu ya da Birinci tür Hankel fonksiyonudur.

Hertz vektörü çözümlerini gözönüne alarak TE ve TM durumları için elektrik ve magnetik alanın bileşenlerini elde edelim.

$\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}$ ve $\vec{H} = \varepsilon \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$ denklemlerinde $\vec{\Pi} = (0,0,\Psi)$ 'yi yerine yazdığımızda

$$E_r = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$E_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

$$E_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \lambda^2 \Psi \tag{2.1.12}$$

$$H_r = -\varepsilon \frac{i\omega}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

$$H_\phi = i\omega\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$H_z = 0$$

elde edilir. $H_z = 0$ olması bu bileşenleri TM modunda olduğunu gösterir. Çünkü TM (Transverse Electric) enine magnetik alan modudur. Elektromagnetik alanlar enine dalgalar üretirler bu sebeple silindir geometride z yönünde ilerleyen elektrik alan, z yönünde salınım yapamaz. TM durumunda magnetik alanın ilerleme yönü ile salınım yönü birbirlerine dik olmalıdır. Bu nedenle $H_z = 0$ seçilir. Benzer düşünceyle alanların simetrik özelliğinden dolayı

$\vec{E} = \mu \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}$ ve $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}$ denklemlerini yazabiliriz. Burada yine $\vec{\Pi} = (0,0,\Psi)$ 'yi yerine yazdığımızda bu kez de

$$E_r = \frac{i\omega\mu}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

$$E_\phi = -i\omega\mu \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$E_z = 0 \qquad (2.1.13)$$

$$H_r = ik \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

$$H_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \Psi}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \lambda^2 \Psi$$

denklemlerini buluruz. Burada $E_z = 0$ olması bu bileşenlerin TE modunda olduğunu gösterir. TE (transverse electric) modu enine elektrik alan modudur. TE durumda elektrik alan yönü ile salınım yönü birbirlerine dik olmalıdır. Bu sebeple $E_z = 0$ seçilir.

Şimdi (2.1.12) ve (2.1.13)'da verilen alanların bileşenlerini ile (2.1.10)'daki Hertz vektörünün bileşenini göz önüne alarak $r < a$ için $\lambda \to \lambda_1$, $\varepsilon \to \varepsilon_1$ ve $\mu \to \mu_1$ ve $r > a$ için $\lambda \to \lambda_2$, $\varepsilon \to \varepsilon_2$ ve $\mu \to \mu_2$ olacak şekilde, geometrik durumlara göre, içerdeki ve dışardaki ortamın dielektrik ve magnetik geçirgenlik katsayılarını farklılaştırarak alanın bileşenlerini yazalım. (2.1.14) ve sonrası için yazacağımız tüm denklemlerde

$-\infty < k < \infty$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$., $\lambda^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - k^2$

$$\lambda_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 - k^2 \qquad \lambda_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2 - k^2$$

$$\lambda_1^2 = k_1^2 - k^2 \qquad \lambda_2^2 = k_2^2 - k^2$$

$$k_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 \qquad k_2^2 = \varepsilon_2 \mu_2 \omega^2$$

olarak tanımlıdırlar. Şimdi TM modları için elektrik ve magnetik alan bileşenlerini yazalım.

$r < a$	$r > a$
$H_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n k_1^2}{r \mu_1 \omega \lambda_1^2} a_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n$	$H_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{r \lambda_2^2} \frac{k_2^2}{\mu_2 \omega} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) F_n$
$H_\phi^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i k_1^2}{\lambda_1 \mu_1 \omega} a_n^i J_n'(\lambda_1 r) F_n$	$H_\phi^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\lambda_2 \mu_2} \frac{k_2^2}{\omega} a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) F_{nn}$
$H_z^i = 0$	$H_z^e = 0$
$E_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda_1} a_n^i J_n'(\lambda_1 r) F_n$	$E_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda_2} a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) F_n$

$$E_{\phi}^{i} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nk}{r} \frac{1}{\lambda_1^2} a_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n \qquad E_{\phi}^{e} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nk}{\lambda_2^2 r} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) F_n$$

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n \qquad E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) F_n \qquad (2.1.14)$$

Denklemlerdeki üssü argümana göre türevi ifade eder. Yani

$$\frac{\partial}{\partial r} J_n(\lambda \mathrm{r}) = \lambda \frac{\partial}{\partial(\lambda \mathrm{r})} J_n(\lambda \mathrm{r}) = \lambda J_n'(\lambda \mathrm{r}) \text{ ve}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(\lambda \mathrm{r}) = \lambda \frac{\partial}{\partial(\lambda \mathrm{r})} J_n H_n^{(1)} = \lambda H_n^{(1)'}(\lambda \mathrm{r}) \text{ 'dir.}$$

TE modları için elektrik ve magnetik alan bileşenlerini yazarsak,

$r < a$ $\qquad\qquad$ $r > a$

$$E_r^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1}{r} \frac{n\omega}{\lambda_1^2} b_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n \qquad E_r^e = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_2}{r} \frac{n\omega}{\lambda_2^2} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_1 r) F_n$$

$$E_{\phi}^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1}{r} \frac{i\omega}{\lambda_1} b_n^i J_n'(\lambda_1 r) F_n \qquad E_{\phi}^e = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_2}{r} \frac{i\omega}{\lambda_2} b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) F_n$$

$$E_z^i = 0 \qquad E_z^e = 0$$

$$H_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda_1} b_n^i J_n'(\lambda_1 r) F_n \qquad H_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda_2} b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) F_n$$

$$H_{\phi}^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{r} \frac{k}{\lambda_1^2} b_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n \qquad H_{\phi}^e = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{r} \frac{k}{\lambda_2^2} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) F_n$$

$$H_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^i J_n(\lambda_1 r) F_n \qquad H_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) F_n \qquad (2.1.15)$$

denklemlerini buluruz. Her iki mod durumunda

$-\infty < k < \infty$, $n = 0,\pm1,\pm2,...$ ve $\lambda_i^2 = \omega^2\varepsilon_i\mu_i - k^2$ $(i = 1,2)$'dir.

Hertz vektörü ile elde ettiğimiz bu sonuçları EK-A'da kaynaksız Maxwell denklemlerini silindirik simetriyi kullanarak elde edilmiştir. Alan bileşenlerimizi geometrik durumuna göre TE ve TM modlarını birlikte göz önüne alarak yeniden yazalım. $r < a$ için elektrik ve magnetik alana ait tüm bileşenler,

$$E_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda_1}a_n^i J_n'(\lambda_1 r) - \frac{\omega}{\lambda_1^2}\frac{n\mu_1}{r}b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$E_\phi^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{r}a_n^i J_n(\lambda_1 r) + \frac{i\omega}{\lambda_1}\mu_1 b_n^i J_n'(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$E_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]F_n \qquad (2.1.16)$$

$$H_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{k_1^2}{\lambda_1^2}\frac{n}{r\omega\mu_1}a_n^i J_n(\lambda_1 r) + \frac{i}{\lambda_1}k b_n^i J_n'(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$H_\phi^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\omega\mu_1}\frac{k_1^2}{\lambda_1}a_n^i J_n'(\lambda_1 r) - \frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{r}b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$H_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]F_n \qquad (\lambda_1^2 = k_1^2 - k^2, \lambda_2^2 = k_2^2 - k^2)$$

şeklini alırlar. Şimdi $r > a$ durumunda E^e, H^e bileşenleri yazalım.

$$E_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda_2}a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) - \frac{\omega}{\lambda_2^2}\frac{n\mu_2}{r}b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r)\right\}F_n$$

$$E_\phi^e = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{r}a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) + \frac{i}{\lambda_2}\omega\mu_2 b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r)\right\}F_n$$

$$E_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r)\right]F_n \qquad (2.1.17)$$

$$H_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_2^2}{\lambda_2^2} \frac{n}{\omega\mu_2} \frac{1}{r} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) + \frac{i}{\lambda_2} k b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$H_\phi^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i}{\omega\mu_2} \frac{k_2^2}{\lambda_2} a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) - \frac{n}{\lambda_2^2} \frac{k}{r} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$H_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \right] F_n$$

(2.1.16) ve (2.1.17) ifadelerinde a_n^i ve a_n^e (b_n^i ve b_n^e) TM ve (TE) katsayılarını ifade eder. İçerdeki ve dışarıdaki alanın teğetsel bileşenleri $r = a$'da süreklilik şartını sağlaması gerekir. Bu süreklilik şartları

$$\left(E_z^i\right)_{r=a} = \left(E_z^e\right)_{r=a} \qquad \left(H_z^i\right)_{r=a} = \left(H_z^e\right)_{r=a}$$

$$\left(E_\phi^i\right)_{r=a} = \left(E_\phi^e\right)_{r=a} \qquad \left(H_\phi^i\right)_{r=a} = \left(H_\phi^e\right)_{r=a} \tag{2.1.18}$$

denklemlerini verir. Görüldüğü gibi modların dağılımını veren denklemler teğetsel denklemlerdir. Süreklilik şartları uygulandığında katsayılar ile bileşenler arasında

$$a_n^i J_n(\lambda_1 a) - a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 a) = 0$$

$$\frac{kn}{\lambda_1^2 a} J_n(\lambda_1 r) a_n^i - \frac{kn}{\lambda_2^2 a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^e + \frac{i\omega\mu_1}{\lambda_1} J_n'(\lambda_1 r) b_n^i - \frac{i\omega\mu_2}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) b_n^e = 0$$

$$b_n^i J_n(\lambda_2 r) - b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) = 0$$

$$\frac{i}{\mu_1\omega} \frac{k_1^2}{\lambda_1} a_n^i J_n'(\lambda_1 r) - \frac{ik_2^2}{\mu_2\omega\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) a_n^e - \frac{n}{\lambda_1^2} \frac{k}{a} J_n(\lambda_1 r) b_n^i + \frac{n}{\lambda_2^2} \frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^e = 0$$

(2.1.19)

şeklinde bağıntılar elde edilir. Bu denklemler

$$\begin{pmatrix} J_n(\lambda_1 r) & -H_n^{(1)}(\lambda_2 r) & 0 & 0 \\ \frac{nk}{\lambda_1^2} J_n(\lambda_1 r) & -\frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) & \frac{i}{\lambda_1}\omega\mu_1 J_n'(\lambda_1 r) & -\frac{i\omega\mu_2}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \\ 0 & 0 & J_n(\lambda_1 r) & -H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \\ \frac{i}{\mu_1\omega}\frac{k_1^2}{\lambda_1} J_n'(\lambda_1 r) & -\frac{ik_2^2}{\mu_2\omega\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) & -\frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{a} J_n(\lambda_1 r) & \frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n^i \\ a_n^e \\ b_n^i \\ b_n^e \end{pmatrix} = 0$$

(2.1.20)

şeklinde matris yapısına getirilir. a_n^i, a_n^e, b_n^i ve b_n^e katsayıları sıfırdan farklı olduğundan buradaki dörde dörtlük matrisin determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} J_n(\lambda_1 r) & -H_n^{(1)}(\lambda_2 r) & 0 & 0 \\ \frac{nk}{\lambda_1^2} J_n(\lambda_1 r) & -\frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) & \frac{i}{\lambda_1}\omega\mu_1 J_n'(\lambda_1 r) & -\frac{i\omega\mu_2}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \\ 0 & 0 & J_n(\lambda_1 r) & -H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \\ \frac{i}{\mu_1\omega}\frac{k_1^2}{\lambda_1} J_n'(\lambda_1 r) & -\frac{ik_2^2}{\mu_2\omega\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) & -\frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{a} J_n(\lambda_1 r) & \frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \end{vmatrix} = 0$$

Böylece,

$$n^2 k^2 \omega^2 (\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2)^2 \left(J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a)\right)^2$$

$$-\lambda_1^2\lambda_2^2 \left\{a\varepsilon_1\lambda_2 J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) - a\varepsilon_2\lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)\right\}$$

$$\times \left\{a\mu_1\lambda_2 J_n'(\lambda_1 r) H_n^{(1)}(\lambda_2 r) - a\mu_2\lambda_1 J_n(\lambda_1 r) H_n^{(1)'}(\lambda_2 r)\right\} = 0 \qquad (2.1.21)$$

modların dağılımını veren denklemi buluruz. (2.1.21) denklemini f_n fonksiyonu olarak yeniden yazdığımızda

$$f_n = \lambda_1^2\lambda_2^2 \Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a)\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a)$$

$$- n^2 k^2 \omega^2 (\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2)^2 \left(J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a)\right)^2 \qquad (2.1.22)$$

$f_n(k,\omega,a)=0$ yapan ω'lar modların öz frekanslarını verir. Burada

$$\Delta_n^{TE}(\lambda_1 a,\lambda_2 a)=a\mu_1\lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 r)H_n^{(1)}(\lambda_2 r)-a\mu_2\lambda_1 J_n(\lambda_1 r)H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \tag{2.1.23}$$

$$\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a,\lambda_2 a)=a\varepsilon_1\lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 a)H_n^{(1)}(\lambda_2 a)-a\varepsilon_2\lambda_1 J_n(\lambda_1 a)H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \text{'dir.} \tag{2.1.24}$$

$-\infty<k<\infty$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\lambda_1^2=\varepsilon_1\mu_1\omega^2-k^2$ ve $\lambda_2^2=\varepsilon_2\mu_2\omega^2-k^2$

Böylece (ε_2,μ_2) geçirgenliklerine sahip ortama (ε_1,μ_1) geçirgenliklerinden oluşan silindiri gömdüğümüzde geri zemindeki elektrik ve magnetik alan modlarını veren dağılım denklemlerini ((2.1.22), (2.1.23) ve (2.1.24)) elde etmiş olduk.

$f_n(k,\omega,a)=0$ denklemlerine transzendental denklemler denir. Bu denklemin köklerini bulmak oldukça zordur. Burada amaç $f_n(k,\omega,a)=0$ yapan ω'ları elde etmektir. Çünkü ω Casimir enerji yani kuantum boşluk enerjisi hesaplarında öz frekansların dağılımını verir.

İçerdeki ve dışardaki modlar aynı hızla yani ışık hızıyla ilerliyorsa diğer bir deyişle

$$\varepsilon_1\mu_1=\varepsilon_2\mu_2=\frac{1}{c^2}\ (\varepsilon_1\neq\varepsilon_2 \text{ ve } \mu_1\neq\mu_2) \tag{2.1.25}$$

bağıntısını sağlıyorsa bu durumda modların dağılımını veren (2.1.22), (2.1.23) ve (2.1.24) denklemlerini yeniden (2.1.25) bağıntısına göre düzenleyelim.

$\lambda_1^2=k_1^2-k^2=\mu_1\varepsilon_1\omega^2-k^2$

$\lambda_2^2=k_2^2-k^2=\mu_2\varepsilon_2\omega^2-k^2$ olarak tanımladığımız denklemleri $\mu_1\varepsilon_1=\mu_2\varepsilon_2$ durumu için $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ yazabiliriz. Bu durumda (2.1.23) ve (2.1.24) nolu denklemler

$$\Delta_n^{TE}(\lambda,a)\equiv\lambda a\left[\mu_1 J_n^{'}(\lambda a)H_n^{(1)}(\lambda a)-\mu_2 J_n(\lambda a)H_n^{(1)'}(\lambda a)\right] \tag{2.1.26}$$

$$\Delta_n^{TM}(\lambda,a)\equiv\lambda a\left[\varepsilon_1 J_n^{'}(\lambda a)H_n^{(1)}(\lambda a)-\varepsilon_2 J_n(\lambda a)H_n^{(1)'}(\lambda a)\right] \tag{2.1.27}$$

olur. Benzer şekilde (2.1.22) denklemi de

$f_n \equiv \lambda^4 \Delta_n^{TE}(\lambda,a)\Delta_n^{TM}(\lambda,a)$ olur. (2.1.28)

Şimdi a yarıçaplı silindir kabuktaki modların dağılımın tartışalım. (2.1.12) ve (2.1.13) denklemlerine yeniden dönersek, sonsuz uzunluktaki silindir kabuk için $r < a$ ve $r > a$ için elektrik ve magnetik alanın bileşenlerini genel haliyle,

$r < a$ için;	$r > a$ için;
$E_r = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega\mu}{r}\frac{n}{\lambda^2} b_n^i J_n(\lambda r) F_n$	$E_r = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega\mu}{r}\frac{n}{\lambda^2} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda r) F_n$
$E_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{\lambda} b_n^i J_n'(\lambda r) F_n$	$E_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{\lambda} b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda r) F_n$
$E_z = 0$	$E_z = 0$
$H_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda} b_n^i J_n'(\lambda r) F_n$	$H_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ik}{\lambda} b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda r) F_n$
$H_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k}{r}\frac{n}{\lambda^2} b_n^i J_n(\lambda r) F_n$	$H_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k}{r}\frac{n}{\lambda^2} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda r) F_n$
$H_r = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^i J_n(\lambda r) F_n$	$H_r = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda r) F_n$ (2.1.29)

şeklinde ifade ederiz. TE modları için elde ettiğimiz bileşenlere $\left(\hat{n}\times\vec{E}\right)\Big|_{r=a} = 0$ ve $\left(\hat{n}\cdot\vec{B}\right)\Big|_{r=a} = 0$ [Stratton,1941, Gosdzinsky ve Romea,1998] sınır koşulları uygulandığında,

$E_\phi\Big|_{r=a} = 0$, $E_z\Big|_{r=a} = 0$ ve $H_r^{(1)}\Big|_{r=a} = 0$ buluruz. Böylece $r < a$ ve $r > a$ için uygulanan sınır koşulları altında TE modlarını

$J_n^{'}(\lambda a)=0 \qquad r<a$

$H_n^{(1)'}(\lambda a)=0 \qquad r>a \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots.,\ \lambda^2=\omega^2-k^2 \quad (\varepsilon\mu=1)$ (2.1.30)

olarak elde ederiz. Benzer şekilde (2.1.12) ve (2.1.13) denklemlerini gözönüne alarak TM modlarının elektrik ve manyetik alan bileşenleri

$r<a$ için	$r>a$ için
$E_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{ik}{\lambda}a_n^i J_n^{'}(\lambda r)F_n$	$E_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{ik}{\lambda}a_n^e H_n^{'}(\lambda r)F_n$
$E_\phi=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k}{r}\frac{n}{\lambda^2}a_n^i J_n(\lambda r)F_n$	$E_\phi=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k}{r}\frac{n}{\lambda^2}a_n^e H_n(\lambda r)F_n$
$E_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^i J_n(\lambda r)F_n$	$E_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^e H_n(\lambda r)F_n$
$H_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega\varepsilon}{r}\frac{n}{\lambda^2}a_n^i J_n(\lambda r)F_n$	$H_r=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\omega\varepsilon}{r}\frac{n}{\lambda^2}a_n^e H_n(\lambda r)F_n$
$H_\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i\omega\varepsilon}{\lambda}a_n^i J_n^{'}(\lambda r)F_n$	$H_\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i\omega\varepsilon}{\lambda}a_n^e H_n^{'}(\lambda r)F_n$
$H_z=0$	$H_z=0$

(2.1.31)

buluruz. a yarıçaplı sonsuz silindir için (2.1.31) denklemlerine $E_\phi\big|_{r=a}=0$, $E_z\big|_{r=a}=0$ ve $H_r^{(1)}\big|_{r=a}=0$ sınır koşulları uygulandığında $r<a$ ve $r>a$ için TM modlarını veren denklemleri

$J_n(\lambda a) = 0 \qquad r < a$

$H_n^{(1)}(\lambda a) = 0 \qquad r > a \qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots ., \;\; \lambda^2 = \omega^2 - k^2 \quad (\varepsilon\mu = 1)$ (2.1.32)

şeklinde elde ederiz.

3. SİLİNDİR GEOMETRİDE CASİMİR ETKİ

Bu bölümde modların dağılımını veren denklemlerden hareketle kontur integral yöntemi ile elektromagnetik alanın silindir simetriye sahip geometride kuantum boşluk enerjisi hesaplanacaktır. Öncelikle geçirgenlik katsayıları farklı iki ortamda, yani silidirin içi ε_1, μ_1 ve dışı ε_2, μ_2 elektrik ve magnetik geçirgenlik katsayılarına sahip ilerleyen modların hızının değişmediğini diğer bir deyişle

$$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2} \quad (\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \text{ ve } \mu_1 \neq \mu_2) \tag{3.1.1}$$

denkliğini göz önüne alarak elektromagnetik alanın kuantum boşluk enerjisini hesaplayacağız. Sonrasında farklı geçirgenlik katsayılarına sahip ortam için elde ettiğimiz modların dağılım sonuçları kullanarak a yarıçaplı silindir kabuğun kuantum boşluk enerjisini yeniden elde edeceğiz.

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\{p\}}\left(\omega_p - \overline{\omega}_p\right) \tag{3.1.2}$$

olarak tanımlanan ifade yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjidir. Burada $\{p\} \to n$ ve k 'lerden oluşan kuantum sayılarıdır.

$n = 0,\pm1,\pm2,....$ $s = 1,2,....$ olarak bilindiğine göre (3.1.2) denklemini

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\omega_{n,s} - \overline{\omega}_{n,s}\right) \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerji ifadesindeki toplamları hesaplamak için Cauchy teoreminin integral temsilini kullanacağız. Herhangi iki $f(z)$ ve $\phi(z)$ fonksiyonları kapalı bir C yolu üzerinde ve içinde analitik olsun ve $f(z)$ de izole

edilmiş $x_1, x_2, x_3, ..., x_j$ gibi sıfır yapan noktalara sahip olsun. Bu durumda Cauchy teoreminin integral temsilini

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\phi(z)\frac{d}{dz}\ell n\, f_n(z) = \sum_j \phi(x_j)$$

şeklinde yazarız $[Denney\ ve\ Krzywichi, 1995]$. Böylece (3.1.3) denklemi

$$E = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint_c d\omega\omega\frac{d}{d\omega}\ell n\left[f_n(\lambda,a) - \tilde{f}_n(\lambda, a\to\infty)\right] \qquad (3.1.4)$$

şekline gelir. Burada

$f_n\left(= f(\lambda,a)\right) \equiv \lambda^4\Delta_n^{TE}(\lambda,a)\Delta_n^{TM}(\lambda,a)$ (bkz. denk. (2.1.22))

ve $\tilde{f}_n \equiv \lambda^4\Delta_n^{TE}(\lambda, a\to\infty)\Delta_n^{TM}(\lambda, a\to\infty)$'dir.

denklemde bütünlüğü sağlamak için ω'yı da λ cinsinden ifade edelim.

$\lambda = \mu\varepsilon\omega^2 - k^2$ için $\omega = \pm c\sqrt{\lambda^2 + k^2}$ olur. Bu durumda

$$d\omega = \frac{c\lambda}{\left(\lambda^2 + k^2\right)^{1/2}}d\lambda \text{ ve}$$

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{d\lambda}{d\omega}\frac{d}{d\lambda} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} = \frac{\left(\lambda^2 + k^2\right)^{1/2}}{c\lambda}\frac{d}{d\lambda} \text{ olur. Böylece (3.1.4) denklemi}$$

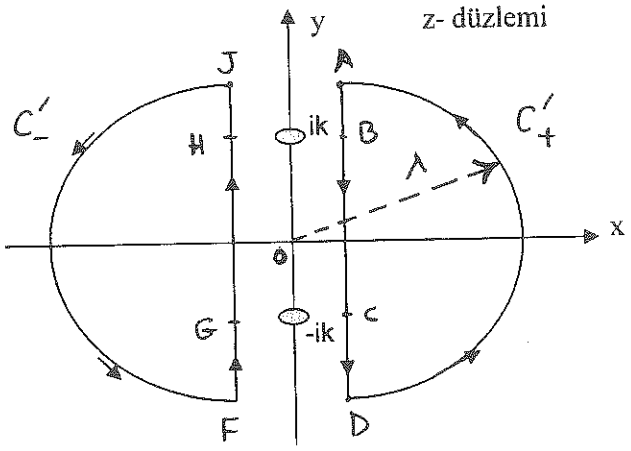
$$E = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint_C d\lambda\sqrt{\lambda^2 + k^2}\,\frac{d}{d\lambda}\ell n\frac{f_n}{\tilde{f}_n} \qquad (3.1.5)$$

şeklini alır. Şimdi $f(\lambda,a)$ ve $\tilde{f}(\lambda, a\to\infty)$ fonksiyonlarını TM ve TE cinsinden ifalerini (3.1.5)'te yerlerine yazarsak, $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$ şartını sağlayan (ε_1, μ_1) geçirgenlik katsayılarına sahip (ε_2, μ_2) geçirgenlik katsayılı ortamla çevrilmiş a yarıçaplı silindirin

yeniden normalleştirilmiş Casimir enerji

$$E=\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint_{C'}d\lambda\sqrt{\lambda^2+k^2}\,\frac{d}{d\lambda}\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(\lambda,a)\Delta_n^{TM}(\lambda,a)}{\Delta_n^{TE}(\lambda,a\to\infty)\Delta_n^{TM}(\lambda,a\to\infty)}\text{'dir.}\qquad(3.1.6)$$

Yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjiyi bulmak için (3.1.6) kompleks integralini hesaplamamız gerekir.



Şekil.1

(3.1.6)'teki kontur integralini çözümü için

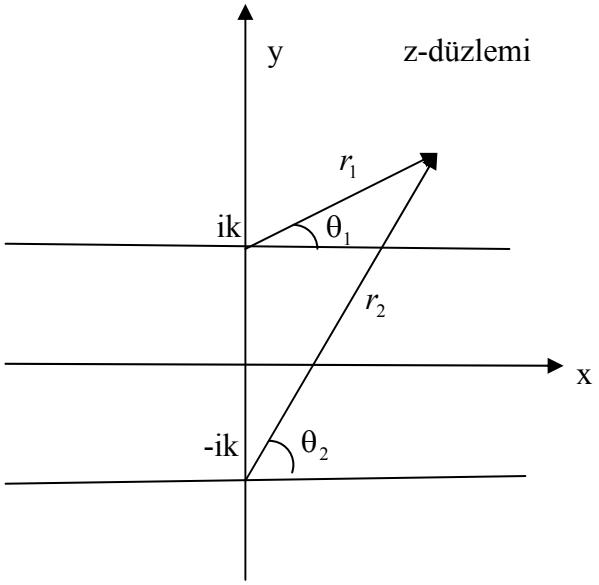
$\lambda\to z\Rightarrow d\lambda=dz$ dönüşümünü uygularsak

$$E=\frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint_{C'}dz\,g(z)\frac{d}{dz}\ell n\frac{f(z,a)}{\tilde{f}(z,a\to\infty)}\qquad(3.1.7)$$

olur. Burada $g(z)=\sqrt{z^2+k^2}$ 'dir. $g(z)$ fonksiyonu çok değerli bir fonksiyon olduğundan $z=\pm ik$ dallanma noktalarına sahiptir. (3.1.7) integrandının tek değerli olabilmesi için $g(z)$ fonksiyonunun tek değerli olduğu aralıkların belirlenmesi gerekir. Kompleks düzlemde $z-ik=r_1e^{i\theta_1}$ ve $z+ik=r_2e^{i\theta_2}$ şeklinde tanımlı olduğundan $g(z)$ fonksiyonunu

$g(z)=\sqrt{r_1r_2}e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$ olarak yazabiliriz. Bu durumda

$g(z) = \sqrt{(z-ik)(z+ik)} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$ olur.



Şekil.2

Şimdi her bir θ_1 ve θ_2 değeri için x'in sıfıra sağdan ve soldan yaklaşma durumları gözönüne alınarak $g(z)$'nin alabileceği değerleri bulalım.

i) $x \to 0^+$ (x sıfıra sağdan yaklaşırken) $y < k$ için $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ ve $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ alınarak $g(z)$ fonksiyonumuzun nasıl davranacağını gösterelim.

$g(z) = \sqrt{z^2 + k^2}$

$g(z) = \sqrt{(z-ik)(z+ik)} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$ için

$z - ik = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z + ik = r_2 e^{i\theta_2}$ olur.

$\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow z - ik = -ir_1$

$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; z + ik = ir_2$ olur.

$z - ik = -ir_1$ denklemi $z = x + iy$ için;

$$x + iy - ik = ir_1$$

$$x = +0 \;\Rightarrow\; r_1 = k - y$$

$z + ik = ir_2$ denklemi $z = x + iy$ için;

$$x + iy + ik = ir_2$$

$x = +0 \;\Rightarrow\; r_2 = k + y$ şeklini alır. Bu durumda $g(z)$;

$$g(z) = \sqrt{r_1 r_2}\; e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} = \sqrt{(y+k)(y-k)}\, e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$$

$$g(z) = \sqrt{k^2 - y^2} \qquad (y < k) \qquad \text{olur.}$$

ii) Şimdi benzer işlemlerle $y > k$ için açılarımızı $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ olacak şekilde değiştirdiğimizde $x \to 0^+$ için

$$g(z) = \sqrt{(z-ik)(z+ik)} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

$$g(z) = \sqrt{r_1 r_2}\; e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)} = i\sqrt{r_1 r_2}$$

$z - ik = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z + ik = r_2 e^{i\theta_2}$ ise

$r_1 = y - k$ ve $r_2 = y + k$ bulunur. Bu durumda $g(z)$ fonksiyonumuz

$$g(z) = i\sqrt{y^2 - k^2} \qquad (y > k) \qquad \text{bulunur.}$$

iii) Aynı şekilde $y<-k$ ve $x\to 0^-$ için $\theta_1=\frac{3\pi}{2}$, $\theta_2=\frac{3\pi}{2}$ alırsak

$g(z)=-i\sqrt{y^2-k^2}$ $\quad (y<-k)$ olur.

iv) Yine $\theta_1=\frac{3\pi}{2}, x\to 0^-$ ve $\theta_2=\frac{\pi}{2}$, $x\to 0^+$ seçimleri için

$g(z)=-\sqrt{k^2-y^2}$ $\quad (y<k)$ elde edilir.

i) ve *iv*) sonuçlarından gördüğümüz gibi $y<k$ için $g(z)=\sqrt{k^2-y^2}$ ve

$g(z)=-\sqrt{k^2-y^2}$ sonuçlarını elde ettik. Bu durumda $g(z)$'yi genelleştirirsek;

$g(z)=\pm\sqrt{k^2-y^2}$ $\quad (|y|<k)$ yazabiliriz.

x eksenini sağdan ve soldan sıfır değerleri için ele aldığımızda $z=x+iy$ için $x=0$ ise $z=iy$ olur. Bu durumda $g(z)=g(iy)$ yazabiliriz. Şimdi θ_1 ve θ_2'nin farklı değerleri için bulduğumuz $g(iy)$ sonuçlarını en genel haliyle bir arada yazalım.

$$g(iy)=\begin{Bmatrix} i\sqrt{y^2-k^2} & y>k \\ \pm\sqrt{k^2-y^2} & |y|<k \\ -i\sqrt{y^2-k^2} & y<-k \end{Bmatrix} \tag{3.1.8}$$

Şimdi de C' kontur integralini inceleyelim. Kontur integralimizin yönünü saatin tersi yönünde alalım (bkz. Şekil.1). Bu integralin çözümünü basitleştirmek için harflerle belirttiğimiz her bir kontur parçasının integralini ayrı ayrı hesaplayalım. Yani C' kontur integralini

$$\oint_{C'}=\lim_{\Lambda\to\infty}\left[\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{C'_+}+\int_{JH}+\int_{HG}+\int_{GF}+\int_{C'_-}\right] \tag{3.1.9}$$

şeklinde yazalım. Öncelikle (3.1.7) denklemindeki kontur integraline ait kısımı göz önüne alarak $\sqrt{z^2+k^2}=g(z)$ olmak üzere,

$$\oint_{C'} dz\sqrt{z^2+k^2}\,\frac{d}{dz}\ell n\frac{f(z,a)}{\widetilde{f}(z,a\to\infty)} \tag{3.1.10}$$

yazarız. $z=\Lambda e^{i\theta}$ için $dz=\Lambda i e^{i\theta}d\theta$ ve $\frac{d}{dz}=\frac{1}{i\Lambda e^{i\theta}}\frac{d}{d\theta}$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda $\int_{C_+}$ ve $\int_{C_-}$ integrallerini yarıçap sonsuz yaklaşımı için sırasıyla hesaplarsak

$$\int_{C_+}\to \ell im_{\Lambda\to\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\sqrt{\Lambda^2e^{2i\theta}+k^2}\,\frac{d}{d\theta}\ell n\frac{f(\Lambda e^{i\theta},a)}{\widetilde{f}(\Lambda e^{i\theta},a\to\infty)}=0 \tag{3.1.11}$$

$$\int_{C_-}\to \ell im_{\Lambda\to\infty}\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} d\theta\sqrt{\Lambda^2e^{2i\theta}+k^2}\,\frac{d}{d\theta}\ell n\frac{f(\Lambda e^{i\theta},a)}{\widetilde{f}(\Lambda e^{i\theta},a\to\infty)}=0 \tag{3.1.12}$$

buluruz. (3.1.10) ve (3.1.11) denklemlerinde elde ettiğimiz sonuçlardan da anlaşıldığı gibi $\int_{C_+}$ ve $\int_{C_-}$ integrallerinden gelen katkı sıfırdır.

Şimdi (3.1.10) denkleminde $z=y$ dönüşümünü yaparak yarıçap sonsuz limitinde

$$\int_{AB}=\ell im_{\Lambda\to\infty}\int_{i\Lambda}^{ik} dy\,g(y)\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(y,a)}{\widetilde{f}(y,a\to\infty)} \qquad \left(g(y)=\sqrt{y^2+k^2}\right))$$

olur. Burada tekrar $y=iy$ değişkeni tanımlarsak $g(y)\to g(iy)$ olur. $g(iy)$ fonksiyonu yerine (3.1.8)'de bulduğumuz $y>k$ durumundaki değeri yazılır. Böylece (3.1.13) denklemi yarıçap sonsuz limitinde

$$\int_{AB}=-i\int_{k}^{\infty} dy\sqrt{y^2-k^2}\,\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(y,a)}{\widetilde{f}(y,a\to\infty)} \tag{3.1.13}$$

olur. Benzer işlemleri $\int_{JH}$ integrali için yaptığımızda

$$\int_{JH} = -i\int_{k}^{\infty} dy\sqrt{y^2-k^2}\,\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(iy,a)}{\widetilde{f}(iy,a\to\infty)} \tag{3.1.14}$$

buluruz. Bu durumda (3.1.13) ile (3.1.14) denklemlerinde aynı sonuçları elde ederiz. Bu durumu Şekil.1'de de görebiliriz. O halde $\int_{AB}=\int_{JH}$ deriz.

$\int_{CD} = \ell im_{\Lambda\to\infty}\int_{-ik}^{-i\Lambda} dy\, g(y)\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(y,a)}{\widetilde{f}(y,a\to\infty)}$ integralinin çözümü için $y=iy$ tanımlayarak $g(iy)$ fonksiyonu yerine (3.1.8) denklemindeki $y<-k$ için ifadesini yazarız. Böylece

$$\int_{CD} = -i\int_{k}^{\infty} dy\sqrt{y^2-k^2}\,\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(-iy,a)}{\widetilde{f}(-iy,a\to\infty)} \tag{3.1.15}$$

olur. Son olarak $\int_{GF}$ integralinin çözümü elde edelim.

$\int_{GF} = \ell im_{\Lambda\to\infty}\int_{-ik}^{-i\Lambda} dy\, g(y)\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(y,a)}{\widetilde{f}(y,a\to\infty)}$ denkleminde (3.1.15) denklemindeki işlem sırasını takip ederek sonuç olarak

$$\int_{GF} = -i\int_{k}^{\infty} dy\sqrt{y^2-k^2}\,\frac{d}{dy}\ell n\frac{f(-iy,a)}{\widetilde{f}(-iy,a\to\infty)} \tag{3.1.16}$$

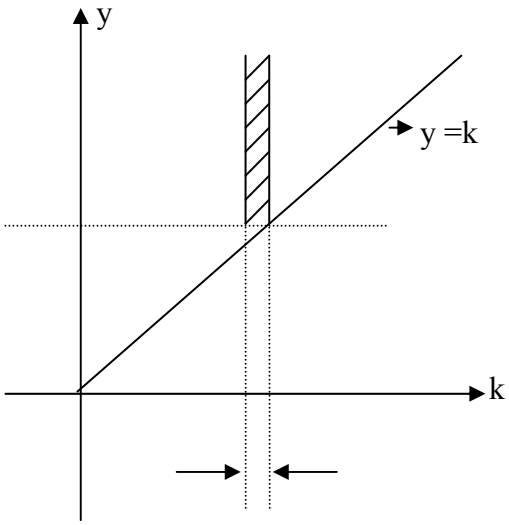
buluruz. $\int_{CD}$ ve $\int_{GF}$ integral sonuçları (3.1.15) ve (3.1.16)'da görüldüğü gibi aynı çıkmıştır. O halde $\int_{CD}=\int_{GF}$ diyebiliriz. Şimdi bulduğumuz tüm sonuçları toplayarak kontur integralimizi yazarsak

$$\oint_{C'} = 4\int dy(-i)\sqrt{y^2-k^2}\,\frac{d}{dy}\ell n\frac{f_n}{\widetilde{f}_n} \tag{3.1.17}$$

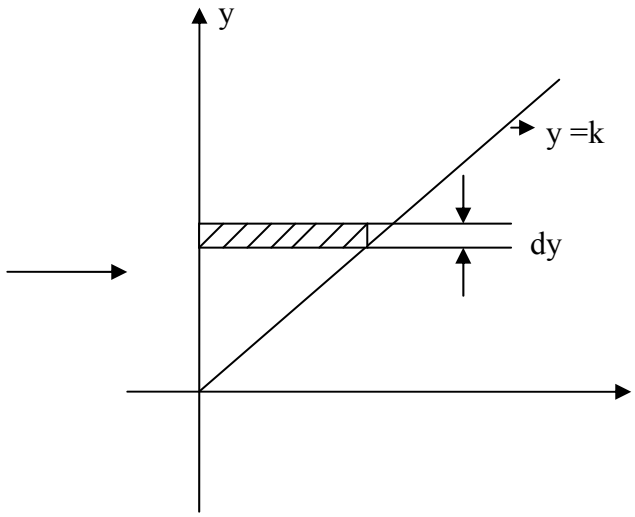
buluruz. Bu sonucu kullanarak (3.1.7) denklemini yeniden yazdığımızda

$$E = -\frac{c}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk \int_k^{\infty}\sqrt{y^2-k^2}\,dy\,\frac{d}{dy}\,\ell n\,\frac{f_n(iay)}{\widetilde{f}_n(iy, a\to\infty)} \tag{3.1.18}$$

yeniden normalleştirilmiş Casimir enerjiyi elde ederiz. Bundan sonraki adım olarak $\int_0^{\infty} dk \int_k^{\infty} dy$ integralinin sınırlarını yeniden düzenlediğimizde (3.1.18) denklemi



Şekil.3



Şekil.4

$$E = -\frac{c}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{y} \sqrt{y^2-k^2}\,dk \int_0^{\infty} dy\,\frac{d}{dy}\,\ell n\,\frac{f_n(iay)}{\widetilde{f}_n(iy, a\to\infty)} \tag{3.1.19}$$

şekline dönüşür. Bu durumda

$\int_0^{y} dk\sqrt{y^2-k^2}$ integralinin çözümü için

$\frac{k}{y}=\cos\theta$ seçelim. Böylece $dk=-y\sin\theta\, d\theta$ olur. Gerekli işlemler ve düzenlemeler yapıldığında

$\int_0^y dk\sqrt{y^2-k^2}=\frac{\pi}{4}y^2$ sonucunu elde ederiz. Böylece (3.1.19) denklemi

$$E=-\frac{c}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\pi}{4}y^2dy\frac{d}{dy}\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(iay)\Delta_n^{TM}(iay)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.20}$$

olur. $ay=z$ ve $dy=\frac{dz}{a}$ ve $\frac{d}{dy}=a\frac{d}{dz}$

dönüşümlerini yaparak (3.1.20) denklemini bir adım daha ileriye taşıyalım. Böylece

$$E=-\frac{c}{8\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dz}{a}\frac{z^2}{a^2}a\frac{d}{dz}\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(iz)\Delta_n^{TM}(iz)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.21}$$

ve yeniden $z\to y$ alırsak

$$E=-\frac{c}{8\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dy\,y^2\frac{d}{dy}\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.22}$$

şeklini alır. Şimdi (3.1.22) denklemindeki integrali kısmi integral yöntemini kullanarak çözelim.

$\int_0^{\infty}UdV=U.V\big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}VdU$ kısmi integral tanımından hareketle

$$\int_0^{\infty}dy\,y^2\frac{d}{dy}\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.23}$$

denkleminde $y^2=U$ ve $dy\frac{d}{dy}\ell n\frac{f_n}{\widetilde{f}_n}=dV$ olsun. Bu durumda

$2ydy = U$ ve $V = \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n}$ olur. Böylece (3.1.23) denklemi

$\int_0^\infty dy\, y^2 \frac{d}{dy} \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n} = y^2 \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n} 2ydy$ şekline gelir. Sınır koşulları altında denklemin sağındaki ilk terimi sıfır olur. Böylece

$$\int_0^\infty dy\, y^2 \frac{d}{dy} \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n} = -\int_0^\infty \ell n \frac{f_n}{\widetilde{f}_n} 2ydy \tag{3.1.24}$$

sonucunu elde etmiş oluruz. Dolayısıyla (3.1.22) denklemini

$$E = \frac{c}{4\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dy\, y \ell n \frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.25}$$

şekline getirmiş oluruz. Şimdi (3.1.25) integralindeki Δ_n^{TE} ve Δ_n^{TM} fonksiyonlarının açık ifadelerini elde edelim. (2.1.26)'da verilen Δ_n^{TE} ve Δ_n^{TM} ifadelerinde

$I_n(y) = i^n J_n(iy)$

$K_n(y) = i^{n+1} \frac{\pi}{2} H_n^{(1)}(iy)$ tanımlarını kullanarak modifiye Bessel fonksiyonlar cinsinden yeniden yazalım.

$$\Delta_n^{TE}(iy) \equiv \frac{2y}{\pi}\left[\mu_1 I_n'(y) K_n(y) - \mu_2 I_n(y) K_n'(y)\right] \tag{3.1.26}$$

$$\Delta_n^{TM}(iy) \equiv \frac{2y}{\pi}\left[\varepsilon_1 I_n'(y) K_n(y) - \varepsilon_2 I_n(y) K_n'(y)\right] \tag{3.1.27}$$

denklemlerini elde ederiz. Şimdi (3.1.25) denklemlerindeki $\Delta_n^{TE}(i\infty)$ ve $\Delta_n^{TM}(i\infty)$ ifadelerini elde etmek için (3.1.26) ve (3.1.27) denklemlerinde n'i sabitleyip $y \to \infty$ için modifiye Bessel fonksiyonlarının

$$I_n(y) \cong \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}, \qquad I_n^{'}(y) \cong \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}$$

$$K_n(y) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y}, \quad K_n^{'}(y) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y}$$

asimtotik davranışlarını göz önüne alarak

$$\Delta_n^{TE}(i\infty) \equiv \frac{\mu_1 + \mu_2}{\pi}$$

$$\Delta_n^{TM}(i\infty) \equiv \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\pi} \tag{3.1.28}$$

modların dağılımını asimtotik biçimini elde ederiz. Böylece (3.1.25) içindeki modların dağılımı

$$\frac{\Delta_n^{TE}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)} = \frac{2y}{\mu_1 + \mu_2}\left[\mu_1 I_n^{'}(y)K_n(y) - \mu_2 I_n(y)K_n^{'}(y)\right]$$

$$\frac{\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TM}(i\infty)} = \frac{2y}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left[\varepsilon_1 I_n^{'}(y)K_n(y) - \varepsilon_2 I_n(y)K_n^{'}(y)\right] \tag{3.1.29}$$

olur. Bu durumda (3.1.25) denklemi

$$E = \frac{c}{4\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dy\, y\, \ell n\left\{\frac{4y^2}{(\mu_1+\mu_2)}\left[\varepsilon_1\mu_1\left(I_n^{'}(y)K_n(y)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. -(\mu_1\varepsilon_2 + \mu_2\varepsilon_1)\left(I_n^{'}(y)K_n(y)I_n(y)K_n^{'}(y)\right) + \varepsilon_2\mu_2\left(I_n(y)K_n^{'}(y)\right)^2\right]\right\} \tag{3.1.30}$$

şeklini alır. (3.1.30)'in içindeki köşeli parantezli terimi daha sade biçime getirebilmek için

$$\Omega = \frac{4y^2}{(\mu_1+\mu_2)}\left[\varepsilon_1\mu_1\left(I_n^{'}(y)K_n(y)\right)^2 - (\mu_1\varepsilon_2 + \mu_2\varepsilon_1)\left(I_n^{'}(y)K_n(y)I_n(y)K_n^{'}(y)\right) + \varepsilon_2\mu_2\left(I_n(y)K_n^{'}(y)\right)^2\right]$$

tanımlayalım. $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ olmak üzere (3.1.30) denklemini düzenleyelim.

$\frac{1}{c^2} = \mu_1\varepsilon_1 = \mu_2\varepsilon_2 \Rightarrow \quad \mu_1\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \mu_2 \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = \varepsilon$ olur. Bu durumda yeniden düzenlenmiş Ω

$$\Omega = \frac{4y^2}{\left(2+\varepsilon+\varepsilon^{-1}\right)}\left[\left(I_n'(y)K_n(y)\right)^2 + \left(I_n(y)K_n'(y)\right)^2 - \left(\varepsilon+\varepsilon^{-1}\right)\left(I_n'(y)K_n(y)I_n(y)K_n'(y)\right)\right] \quad (3.1.31)$$

olur. Ω 'yı (3.1.30) denkleminde yerine yazıp düzenlediğimizde

$$E = \frac{c}{4\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dy\, y\ell n\left\{\frac{4y^2}{\left(2+\varepsilon+\varepsilon^{-1}\right)}\left[\left(I_n'(y)K_n(y)\right)^2 + \left(I_n(y)K_n'(y)\right)^2 - \left(\varepsilon+\varepsilon^{-1}\right)\left(I_n'(y)K_n(y)I_n(y)K_n'(y)\right)\right]\right. \quad (3.1.32)$$

buluruz. Şimdi modifiye Bessel fonksiyonlarının Wronskian bağıntısını

$$I_n(y)K_n'(y) - I_n'(y)K_n(y) = -\frac{1}{y} \quad (3.1.33)$$

ve toplam türev açılımını

$$I_n(y)K_n'(y) + I_n'(y)K_n(y) = \left(I_n(y)K_n(y)\right)' \quad (3.1.34)$$

kullanarak Ω yeniden yazılırsa

$\Omega = y^2\left[\left(I_n(y)K_n(y)\right)'\right]^2\frac{\left(2-\varepsilon-\varepsilon^{-1}\right)}{\left(2+\varepsilon+\varepsilon^{-1}\right)}+1$ ifadesine dönüşür.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \Omega = 1 - y^2\left[\frac{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2}{\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)^2}\right]\left[\left(I_n(y)K_n(y)\right)'\right]^2$$

O halde, $\ell n\Omega = \ell n\left\{1-\left[\left(I_n(y)K_n(y)\right)'\right]^2\xi^2\right\}$ olur. Burada $\xi^2 = \left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right)^2$'dir.

Şimdi (3.1.32) denklemini son düzenlemelerle yeniden yazarsak

$$E = \frac{c}{4\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy\, y \ell n \left\{ 1 - \xi^2 \left(y [I_n(y) K_n(y)]' \right)^2 \right\} \tag{3.1.35}$$

şeklinde daha sade bir biçime indirgemiş oluruz. Böylece regülarize edilmemiş yeniden normalleştirilmiş Casimir enerji modifiye Bessel fonksiyonları ve n'ler üzerinden toplam şeklinde ifade etmiş oluruz.

$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n$ ise bu durumda (3.1.35) göz önüne alındığında Casimir enerjiyi bulmak için

(3.1.35) ifadesindeki ıraksak serinin içindeki sonsuz olan kısmın ayırılması ve sınıflandırılmasını gerekmektedir. Iraksak ifadelerin tanımlanması için

$$E_n = \frac{c}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} dy\, y \ell n \left\{ 1 - \xi^2 \left(y [I_n(y) K_n(y)]' \right)^2 \right\} \tag{3.1.36}$$

yazılır. Aslında (3.1.36) nolu denklemdeki Bessel fonksiyonları y'nin artan kuvvetlerine göre bir seri oluştururlar. Bu seri bütün y değerleri için yakınsak karakterdedir. Eğer $|y|$'yi çok büyük seçersek seri yavaşça yakınsak davranır. Bu da başlangıçtaki kimi terimlerin taşıdığı bilgiyi görmemizi engeller. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak için Bessel fonksiyonlarının çok hızlı şekilde yakınsak yapılması gerekir. Bunu da ancak Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılımı ile yapabiliriz. Böylece $y = nz$ değişkenini tanımlayarak Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılım ifadelerini kullanalım. Değişmeyecek olan sınır koşulları altında E_n'yi

$$E_n = \frac{n^2 c}{4\pi a^2} \int_0^{\infty} z dz . \ell n \left\{ 1 - \xi^2 \left(nz [I_n(nz) K_n(nz)]' \right)^2 \right\} \tag{3.1.37}$$

şeklinde yazarız.

Not: $\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \qquad |x| \le 1,\ x \ne -1$

her iki tarafta $x \to -x$ alınırsa

$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ elde edilir.

$\ell n\left\{1 - \xi^2 \left(nz\left[I_n(nz)K_n(nz)\right]'\right)^2\right\} = \ell n(1-x)$ şeklinde de ifade edebiliriz. O halde burada

$x = \xi^2 \left(nz\left[I_n(nz)K_n(nz)\right]'\right)^2$'dir. (3.1.37) ifadesinde $\ell n(1-x)$ açılımını kullandığımızda ilk terim n'den bağımsız olur. Bu bize ilk ıraksak ifadeyi verir. Bu durumda E_n'yi

$$E_n \cong \frac{c}{4a^2\pi}\int_0^\infty n^2 z dz(-x) \tag{3.1.38}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılım ifadelerini bulalım (Bkz. EK-B Denk. (5.1.11)(5.1.12)). İlk olarak $I_n(nz)\, K_n(nz)$ çarpımını elde edip daha sonra bu iki çarpımın türevini aldığımızda

$$I_n(nz)K_n(nz) = \frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left[1 + O\left(\frac{1}{n^{2p}}; p \geq 2\right)\right]$$

$\left(I_n(nz)K_n(nz)\right)' = \frac{d}{d(nz)}\left[I_n(nz)K_n(nz)\right]$ olmak üzere

$\left(I_n(nz)K_n(nz)\right)' = -\frac{1}{2n^2}\frac{z}{(1+z^2)^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}; p \geq 2\right)$ buluruz. x'teki işlem sırasını takip edersek şimdi de elde ettiğimiz bu son ifadeyi nz ile çarpıp karesini aldığımızda

$x = \xi^2 \frac{z^4}{4n^2(1+z^2)^3}$ buluruz. Burada ıraksayan terimi ortaya çıkarmak için $\frac{1}{n^2}$ terimini gözönüne aldık diğer terimler sonlu bir ifade üretmektedir.Böylece

$$E_n \cong -\frac{c\xi^2}{16a^2\pi}\int_0^\infty dz.\frac{z^5}{(1+z^2)^3} \equiv E^\infty \tag{3.1.39}$$

sonucunu elde etmiş oluruz. E^{∞} dememizin nedeni içinde ıraksak ifadeleri barındırmasıdır. Bu enerji ifademiz sonusuza gideceğinden bu sonsuzluğu ayıklamak için çeşitli adımları takip edeceğiz. Enerji ifademizi

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(E_n - E^{\infty} + E^{\infty}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(E_n - E^{\infty}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}E^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{E}_n + E^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0 \qquad (3.1.40)$$

şeklinde gösterebiliriz. Böylece

$$\overline{E}_n = \left(E_n - E^{\infty}\right) \qquad (3.1.41)$$

ifadesi sonsuzluktan ayıklanmış ifadeyi temsil eder. Burada önemli olan

$E^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0$ ifadesindeki ıraksak ifadelerin uygun matematiksel analizle ayıklanması ve dışarı atılmasıdır. Sonsuzlukların ayıklanıp atılması için Riemann Zeta Fonksiyonu kullanalım. Rieman Zeta fonksiyonu

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad \mathrm{Re}\, s > 1 \qquad (3.1.42)$$

şeklinde verilir$\left[Titchmarsh, 1986\right]$. Şimdi bu tanımı kullanarak $\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0$ ıraksak toplamını yazalım.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{-s} = \sum_{n=-\infty}^{-1}n^{-s} + (n=0)^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}n^{-s} \qquad (3.1.43)$$

Enerji ifadesindeki n'ler çift kuvvetli olduklarından

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{-s} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} + 1$$

$$= 2\zeta(s) + 1 \tag{3.1.44}$$

buluruz. Böylece

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{0} = \ell im_{s\to 0^{+}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \tag{3.1.45}$$

olur. (3.1.40) denklemindeki ayıklanmak istenilen ıraksak ifadeler

$$E^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{0} = -\frac{c\xi^{2}}{16\pi a^{2}} \ell im_{s\to 0^{+}} \int_{0}^{\infty} \frac{z^{5-s} dz}{\left(1+z^{2}\right)^{3}} \left[2\zeta(\mathrm{s}) + 1\right] \tag{3.1.46}$$

şeklini alır. Şimdi $\left[2\zeta(\mathrm{s}) + 1\right]$ ifadesini hesaba katalım. $\zeta(\mathrm{s})$ Riemann Zeta Fonksiyonunu $\mathrm{s} = 0$ 'de Taylor serisine açalım.

$$\zeta(\mathrm{s}) = \zeta(0) + \frac{\mathrm{s}}{1!} \frac{d\zeta(\mathrm{s})}{ds}\bigg|_{s=0} + \frac{\mathrm{s}^{2}}{2!} \frac{d^{2}\zeta(\mathrm{s})}{ds^{2}}\bigg|_{s=0} + \ldots \tag{3.1.47}$$

(3.1.46) denklemindeki integral $\frac{1}{s}$ gibi davranış gösterdiğinden Taylor seri açılımının ilk iki terimini gözönüne alalım. Yani

$$\zeta(\mathrm{s}) \cong \zeta(0) + \frac{\mathrm{s}}{1!} \frac{d\zeta(\mathrm{s})}{ds}\bigg|_{s=0} \tag{3.1.48}$$

Bu yaklaşımla (3.1.46) denklemini yeniden yazarsak

$$E^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{0} = -\frac{c\xi^{2}}{16\pi a^{2}} \ell im_{s\to 0^{+}} \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\right) \left[2\zeta(0) + 2s \frac{d\zeta(\mathrm{s})}{ds}\bigg|_{s=0} + 1\right] \tag{3.1.49}$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{5-s}dz}{\left(1+z^2\right)^3} = \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\right) \tag{3.1.50}$$

olur. Ayrıca Riemann Zeta fonksiyonunun ve türevinin $s = 0$ 'da değerlerini alarak

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \left.\frac{d\zeta(\mathrm{s})}{ds}\right|_{s=0} = -\frac{1}{2}\ell n 2\pi \tag{3.1.51}$$

$$E^{\infty}_{n=-\infty} \sum^{\infty} n^0 = -\frac{\mathrm{c}\xi^2}{16\pi a^2} \lim_{s\to 0+}\left(\frac{1}{s} - \frac{3}{4}\right)(-)\mathrm{s}\ell n(2\pi)$$

$$= \frac{c\xi^2}{16\pi a^2}\ell n(2\pi) \tag{3.1.52}$$

bulunur. Böylece Casimir enerjiyi sonsuz kılan kısmı Riemann Zeta fonksiyonu ile ayıkladığımızda ıraksak olmayan ifadeleri elde etmiş oluruz. Böylece renormalize Casimir enerji

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{E}_n + \frac{c\xi^2}{16\pi a^2}\ell n(2\pi) \tag{3.1.53}$$

şekline gelmiş olur. (3.1.40) denklemindeki tanımlardan hareketle

$$\overline{E}_n = \frac{c}{4\pi a^2}\left\{\int_0^{\infty} y dy \ell n\left[1 - \xi^2\sigma_n^2(y)\right] + \frac{\xi^2}{4}\int_0^{\infty}\frac{z^5 dz}{(1+z^2)^3}\right\} \tag{3.1.54}$$

$$\sigma_n(y) = y\left(I_n(y)K_n(y)\right)'$$

şeklinde ifade ederiz. Şimdi bu noktada (3.1.53) denklemindeki sonlu terimlerin neler içerdiğinin analizini yapalım. (3.1.53) denklemindeki ilk terimi göz önüne aldığımızda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{E}_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n + \overline{E}_0 \tag{3.1.55}$$

şeklinde hesaba katarız. (3.1.54) denkleminin içinde ıraksak ifadeler bulunmamaktadır. Daha açık deyişle üstteki ifadenin ilk terimi olan integralin içindeki ıraksak ifadelerini ikinci terim yok etmektedir. Bu durumda $n=0$ ifadesini

$$\overline{E}_0 = \frac{c}{4\pi a^2}\left\{\int_0^\infty y dy \ell n\left[1-\xi^2\sigma_0^2(y)\right]+\frac{\xi^2}{4}\int_0^\infty \frac{z^5 dz}{(1^2+z^2)^3}\right\} \tag{3.1.56}$$

şeklinde yeniden yazarız. (3.1.56) denklemindeki integraller $y\to 0$ ve çok büyük y'ler söz konusu olduğunda yakınsakdırlar.

(3.1.55) ifadesindeki ilk terimi yani hesaplamak için hızlı bir şekilde yakınsaklık ifadesini veren modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılımını kullanalım. Uniform asimtotik açılımı kullanmak için (3.1.54) denkleminde $y\to nz$ olarak tanımlayalım (ıraksak ifadeleri belirlemek için aynı yöntemi gündeme getirmiştik). Uniform asimtotik açılımıyla y'yi sabit tutup n'i sonsuza götürdüğümüzde modifiye Bessel fonksiyonları

$$I_n(nz)\approx \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\frac{1}{(1+z^2)^{1/4}}e^{n\eta}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k}{n^k}\right]$$

$$K_n(nz)\approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{1}{(1+z^2)^{1/4}}e^{-n\eta}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k\frac{U_k}{n^k}\right] \tag{3.1.57}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\eta=\sqrt{1+z^2}+\ell n\dfrac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$ ve $t=\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$'dir.

(3.1.57) denklemindeki U_k ifadelerinin açılımı için $U_0(t)=1$ olmak üzere

$$U_{k+1}(t)=\frac{1}{2}t^2(1-t^2)U_k'(t)+\frac{1}{8}\int_0^t(1-5t^2)U_k dt \tag{3.1.58}$$

genel formülünü kullanarak elde ederiz. Burada $k=0,1,2,3,...,$ değerlerini alır. Bu durumda

$k=0$ için; $U_1(t)=\dfrac{1}{24}(3t-5t^3)$

$k=1$ için; $U_2(t)=\dfrac{1}{1152}(81t^2-462t^4+385t^6)$

$k=2$ için; $U_3(t)=\dfrac{1}{414720}(30375t^3-369603t^5+765765t^7-425425t^9)$

$k=3$ için; $U_4(t)=\dfrac{1}{39813120}(4465125t^4-94121676t^6$

$$+349922430t^8-446185740t^{10}+185910725t^{12}) \qquad (3.1.59)$$

şeklinde istenilen tüm U_k değerleri elde edilir. (3.1.57) denklemlerindeki toplam ifadelerini açarsak her bir ifademiz

$$I_n(nz)\approx\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\frac{1}{(1+z^2)^{1/4}}e^{n\eta}\left[1+\frac{U_1}{n}+\frac{U_2}{n^2}+\frac{U_3}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^p};p\geq 4\right)\right]$$

$$K_n(nz)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{1}{(1+z^2)^{1/4}}e^{-n\eta}\left[1-\frac{U_1}{n}+\frac{U_2}{n^2}-\frac{U_3}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^p};p\geq 4\right)\right] \qquad (3.1.60)$$

şeklini alacaktır. Bu durumda

$$I_n(nz)K_n(nz)=\frac{t}{2n}\left\{1+\frac{1}{n^2}\left[2U_2-U_1^2\right]+\frac{1}{n^4}\left[2U_4-2U_3U_1+U_2^2\right]\right.$$
$$+\frac{1}{n^6}\left[2U_6-2U_5U_1+2U_4U_3-U_3^2\right]+\frac{1}{n^8}\left[2U_8-2U_7U_1+2U_6U_2-2U_5U_3+U_4^2\right]$$
$$+\frac{1}{n^{10}}\left[2U_{10}-2U_9U_1+2U_8U_2-2U_7U_3+2U_6U_4-U_5^2\right]$$
$$\left.+\frac{1}{n^{12}}\left[2U_{12}-2U_{11}U_1+2U_{10}U_2-2U_9U_3+2U_8U_4-2U_7U_5+U_6^2\right]+O\left(\frac{1}{n^p};p\geq 4\right)\right\} \qquad (3.1.61)$$

denklemini elde ederiz .Burdadaki (parantez içerisindeki) her bir U_k değerini (3.1.58) denkleminden elde ederek (3.1.61)'de yerine yazarız ve buradan da

$$\left[nz\left(I_n(nz)K_n(nz)\right)'\right]^2 = \frac{z^4}{n^2}\frac{t^6}{4} + \frac{z^4}{n^4}\left(\frac{3}{16}t^8 - \frac{15}{8}t^{10} + \frac{35}{16}t^{12}\right)$$

$$+\frac{z^4}{n^6}\left(\frac{9}{16}t^{10} - \frac{265}{16}t^{12} + \frac{645}{8}t^{14} - \frac{2037}{16}t^{16} + \frac{1015}{16}t^{18}\right) + \mathrm{O}(\frac{1}{n^{2p}}; \mathrm{p} \geq 4)$$

buluruz. $x = \xi^2\left(nz\left[I_n(nz)K_n(nz)\right]'\right)^2$ tanımlarsak

$$\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,\ |x| \leq 1,\ x \neq 1 \tag{3.1.62}$$

denklemini kullanarak kolaylıkla seriye açarız.

$$\ell n(1-\mathrm{x}) = -\frac{\xi^2}{4n^2}\frac{z^4}{(1+z^2)^3} + \frac{\xi^2 z^4}{16n^4}\left(\frac{3}{(1+z^2)^4} - \frac{30}{(1+z^2)^5} + \frac{35}{(1+z^2)^6}\right) - \frac{\xi^2}{32n^4}\frac{z^8}{(1+z^2)^6}$$

$$-\frac{\xi^2 z^4}{16n^6}\left(\frac{9}{(1+z^2)^5} - \frac{265}{(1+z^2)^6} + \frac{1290}{(1+z^2)^7} - \frac{2037}{(1+z^2)^8} + \frac{1015}{(1+z^2)^9}\right)$$

$$-\frac{\xi^4 z^8}{64n^6}\left(\frac{3}{(1+z^2)^7} - \frac{30}{(1+z^2)^8} + \frac{35}{(1+z^2)^9}\right) - \frac{\xi^6}{192n^6}\frac{z^{12}}{(1+z^2)^9} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^{2p}}; \mathrm{p}\ \text{¡İ}\ 4)$$

(3.1.63)

(3.1.62) ve (3.1.63) ifadelerini $y \to nz$ şekliyle değişkeni değiştirilmiş durumuyla (3.1.54)

$\overline{E}_n = \frac{c}{4\pi a^2}\left(\int_0^\infty n^2 z dz \ell n(1-\mathrm{x}) + \frac{\xi^2}{4}\int_0^\infty \frac{z^5 dz}{(1+z^2)^3}\right)$ denkleminde yerine yazarsak

$$\overline{E}_n\big|_{n=\square\ddagger} \approx \frac{c}{4\pi a^2}\left\{\frac{10-3\xi^2}{960n^2} - \frac{28224 - 7344\xi^2 + 720\xi^4}{15482880n^4}\right.$$

$$+\frac{6820-1008\xi^2+120\xi^4-7\xi^6}{7096320n^6}-O(\frac{1}{n^{2p}};p\geq 4)\Bigg\} \tag{3.1.64}$$

ifadesini elde ederiz. Böylece Casimir enerji

$$E\cong\overline{E}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2\pi a^2}\Bigg\{\frac{10-3\xi^2}{960n^2}-\frac{28224-7344\xi^2+720\xi^4}{15482880n^4}$$

$$+\frac{6820-1008\xi^2+120\xi^4-7\xi^6}{7096320n^6}-O(\frac{1}{n^{2p}};p\geq 4)\Bigg\}+\frac{c\xi^2}{16\pi a^2}\ell n2\pi \tag{3.1.65}$$

olur $[Milton\,vd.,1999]$. Özel durumlar için buradan hareketle $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}$ Riemann Zeta fonksiyonlarının sayısal değerleri kullanılarak uygulamada örnek durumlar için sayısal sonuçlar bulunur.

Şimdi (3.1.65) denkleminde elde ettiğimiz sonucu a yarıçaplı silindir kabuğun renormalize Casimir enerjiye örnekleyerek hesaplayalım. Başlangıç ifademiz (3.1.25) denklemi ile aynı biçimdedir böylece (3.1.25) yardımıyla Renormalize Casimir enerji

$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ ve $\mu_1=\mu_2=\mu$ durumunda $\varepsilon\mu=\frac{1}{c^2}=1$ olacağından c=1 için

$$E=\frac{1}{4\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}dy\,y\,\ell n\frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{3.1.66}$$

yazılır. Burada Δ_n^{TE} ve Δ_n^{TM} ifadeleri a yarıçaplı silindirin modlarının dağılımını veren denklemlerdir. (2.1.30) ve (2.1.32) denklemini modifiye Bessel fonksiyonları ve modife Bessel fonksiyonlarının asimtotik açılımlarını kullanarak

$$\frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)}=-4y^2I_n(y)I_n'(y)K_n(y)K_n'(y) \tag{3.1.67}$$

şeklinde elde edilir. Modifiye Bessel fonksiyonunun Wronskianını kullanarak (3.1.67) denklemindeki ifadeyi daha sade bir

$$\frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} = 1 - \left[y\left(I_n(y)K_n(y)\right)' \right]^2 \tag{3.1.68}$$

şekline getiririz. Böylece (3.1.66) denklemi

$$E = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dy\, y\, \ell n \left[1 - \left[y\left(I_n(y)K_n(y)\right)' \right]^2 \right] \tag{3.1.69}$$

olur. Bu ifadeyi katı silindir için elde ettiğimiz denklem ile katşılaştırdığımızda a yarıçaplı silindirin renormalize enerjisi (3.1.35) denkleminde $\xi^2 = 1$ ve $c = 1$ alınırsa elde edilebileceği kolayca görülebilir. Böylece katı silindir için yaptığımız hesaplarla $\xi^2 = 1$ ve $c = 1$ alırsak a yarıçaplı silindir kabuğun renormalize Casimir enerjisi

$$E = \overline{E}_0 + \frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{7}{480}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{5}{1792}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \right) \tag{3.1.70}$$

elde edilir. Sayısal olarak

$\overline{E}_0 = -0.05186\dfrac{1}{a^2}$ ve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ tanımlarını kullanarak

$$E_{kabuk} = \frac{1}{4\pi a^2}(-0.1704)$$

$$= \frac{1}{a^2}(-0.01356)$$

sonucu bulunur$\left[Milton\ vd., 1999 \right]$. Bu sonuç ilk defa DeRaad ve Milton $\left[DeRaad\ ve\ Milton, 1981 \right]$ tarafından elde edilmiş ifade ile büyük bir uyum içerisindedir. DeRaad ve Milton Green's fonksiyon yöntemi ile silindirik kabuğun Casimir enerjisini

buldular. Burada ise kontur integral ile modların toplamı regülarizasyon yöntemi kullanılarak aynı sonuç elde edilmiştir.

SONUÇ

Klasik alan teorisinden farklı olarak kuantum alan teorisinde zaman zaman enerji, kuvvet, yük ve kütle gibi fiziksel büyüklüklerin ıraksak seriler olarak ortaya çıktıkları görülmüştür. Enerji, yük ve kütle gibi fiziksel büyüklüklerin doğada sonlu değerler aldığı bilinmektedir. Teoride sonsuz değerlerin çıkması teorilerimizin bir takım bozukluklarından kaynaklanmaktadır. Daha gelişmiş teorilerde bu sorunların giderilmesi beklenmektedir. Ancak mevcut teorilerimizin içinde bile bazı yöntemlerle bu ıraksak ifadelerden deneylerle yüksek seviyede uyum sağlayan sonlu sonuçlar elde etmek olasıdır $[Bayin, 2004]$.

Casimir enerji hesaplarında ortaya çıkan ıraksak enerji büyüklüklüğü regülarizasyon ve renormalizasyon ile sonlu ve deneylerle çok yüksek uyum sağlayan sonuçlar üretilmiştir. Burada regülarizasyon ile ıraksak ifadelerin içindeki sonsuz olan kısmın ayrışmasını ve sınıflandırılmasını yaparız. Renormalizasyon ise bu sonsuzlukları fiziksel bir değişkenle ayıklanması ve atılmasıdır. Casimir enerji alandan alana, geometriden geometriye, topolojiden topolojiye ve boyuttan boyuta farklılıklar gösterdiği için hepsini kapsayacak yegane regülarizasyon ve renormalizasyon tekiniğine sahip değiliz. Casimir etki için farklı yöntemler uygulandığında, örneğin Green's fonksiyon formalizmi, stress tensör method, çoklu saçılma açılımı, Zeta fonksiyon regülarizasyon tekniği, Heat Kernal serileri ve kontur integral ile direkt modların toplamı yöntemi, bu yöntemlerin farklı hesap yaklaşımları ve farklı fiziksel yorumlar sunmaktadır. Böylece Casimir etki tartışmalarında uygulanan regülarizasyon yöntemlerinin seçiminde ve sonuçlarında dikkat etmek gerekir. İşte bu noktada herhangi bir geometriyi göz önüne aldığımızda farklı yöntemlerle aynı fiziksel sonlu sonucu bulmak zorundayız.

Bu çalışmada silindir geometride elektromagnetik alanın Casimir etkisi göz önüne alınmıştır. Öncelikle dielektrik ve magnetik geçirgenlik katsayısı ε_1 ve μ_1'den yapılmış materyalin ε_2 ve μ_2 ile yapılmış malzeme ile çevrelenerek elde edilen geometri için kontur integral tekniği ile modların toplamı yapılarak elektormagnetik alanın kuantum vakum

enerjisi hesaplanmıştır. Çıkan sonusuzluklar içerdeki ve dışardaki modlar aracılığı ile birbirlerini yok ettiği görülmüştür. Matematiksel olarak renormalize Casimir enerji içindeki ıraksak ifadeler Riemann Zeta fonksiyonu aracılığı ile ayıklanmıştır. Farklı ortamla çevrelenmiş katı silindirin hesaplarından hareketle sonsuz uzunluktaki silindir kabuğun Casimir enerjisi kontur integral ile direkt modların toplamı yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Her ne kadar küresel kabuğun Casimir enerjisi pozitif işaretli olmasına rağmen, silindir kabuğun Casimir enerjinin işareti ideal iletken paralel levhalarla uyumlu olduğu görülmüştür. Paralel düzlemlerle ve silindir geometride Casimir enerji çekici kuvvet üretir. Silindir geometride kontur integral yöntemi ile modların toplamı kullanılarak göz önüne aldığımız Casimir enerji sonuçları Green's Fonksiyon ve Zeta fonksiyon düzenleme teknikleriyle de uyumlu olduğu gözlemlenmiştir[*DeRaad veMilton*,1981].

Silindir geometri için yapılan Casimir enerji hesaplarında hala bir takım zayıf noktalar bulunmaktadır. Skalar alan için yarı çembersel sonsuz silindirin Casimir enerji ifadeleri tekillikler içermektedir[*Nesterenko vd*.,2001]. Mevcut bilinen bütün renormalizasyonlar uygulandığında bu tekilliklerden kurtulunamamıştır. Sonlu fiziksel kuantum boşluk enerjisi elde edilmesi için farklı renormalizasyona ihtiyaç bulunmaktadır. Bununla beraber geçirgenlik katsayısı ε_2 ve μ_2'den oluşan ortamın içine ε_1 ve μ_1 silindiri bandırdığımızda

$$\xi^2 = \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)^2 << 1, \qquad \varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = \frac{1}{c^2}$$

şartını sağlayan durumlarda silindirin Casimir enerjisinin sayısal yaklaşıklıkla elde edilen çözümü Nesterenko [*Nesterenko ve Pirozhenko*,1999] ile Milton'un [*Milton vd*.,1999] çalışmaları da birbirleri ile çelişmektedir. Bu çelişki regülarizasyon ve renormalizasyonlardan kaynaklanmamaktadır [*Nesterenko ve Pirozhenko*,2000], [*Pelaez ve Milton*,2005].

Burada geliştirmiş olduğumuz öz frekansların kompleks düzlemdeki kontur integrali ile modların toplamı yöntemi kullanarak eş merkezli iki silindirin arasındaki

elektromagnetik alanın Casimir enerjisinin işaretini anlamak oldukça ilginç bir problem olarak çözüm beklemektedir. Biz de burada edindiğimiz tecrübeyi geliştirerek bu problemi gelecekte çözeceğiz.

KAYNAKLAR

Abromowitz, M., **Stegun** I. A., 1964 ‘‘Handbook of Mathematical Functions’’, National Bureau of Standarts, Washington, D.C.20402, Tenth printing.

Bayın, S., 2004, ‘‘Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik yöntemler’’ Ders kitapları A.Ş., 2.baskı.

Bjorken, J.D., **Drell**, S.D., 1965 ‘‘Relativistic Quantum Fields’’

Bowers, M.E., **Hagen**, C.R., 1999, Phys. Rev. D59, 025007

Boyer, T.H., 1970, Phys. Rev. 174, 1764

Casimir, H.B.G., 1948, Proc. K. Mod. Acad. Wet., 51, 793

Dennery, P., **Krzywichi**, A., 1995, Mathematics for Physics, Dover

DeRaad, L.L., Jr., **Milton**, K., 1981, Ann. Phys. (N.Y.) 136, 229

DeRaad, L.L., Jr., 1985, Fortschr. Phys., 33, 117

Gosdzinsky, P., **Romea**, A., 1998, Phys. Letter B441, 265

Lamoreaux, S.K., 1997, Phys. Rev. Lett. 78, 5

Milton, K.A., **DeRaad**, L.L., Jr. ve **Schwinger** J., 1978, Ann. Phys. 115, 388

Milton, K.A., **Nesterenko**, A.V., **Nesterenko**, V.V., 1999, ‘‘Mode by Mode Summation For The Zero Point Electromagnetic Energy of An Infinite Cylinder’’, Phys. Rev. D59, 105009

Nesterenko, V.V., **Pirozhenko**, L.G., 1998, Phys. Rev. D57, 1284

Nesterenko, V.V., **Pırızhenko**, I. G., 1999, Phys. Rev. D 60, 125007

Nesterenko, V.V., **Pirozhenko**, I.G., 2000, J of Math Physics 41, 4521

Nesterenko, V.V., **Lambiase**, G., Scarpella G., 2001, J of Math. Phys. 42, 1974

Özcan, M., 2005, Physics letters A 344, 307

Özcan, M., 2006, Class. Quantum Gravity 23, 5531

Pelaez, I.C., **Milton**, K.A., 2005, Annals of Physics 320, 108

Plunien, G., **Muller**, B., **Greiner**, W., 1986, ‘‘The Casimir Effect’’, Phys. Reports (Review Section of Physics Letters)

Sparnaay, M.J., 1958, Physica 24, 751

Stratton, J.A., 1941, ‘‘Electromagnetic Theory’’

Tabor, D., **Winterton,** R.H.S., 1969, Proc. R. Soc. London, A312, 435

Titchmarsh, E.C., 1986, ‘‘ The Theory of the Riemann Zeta-Function’’, 2ed., Oxford

EK-A

2. KÜTLESİZ SKALER ALAN

Ψ skaler alanın uzay-zaman içerisinde noktadan noktaya değişimini veren dinamik denklem $\Box \Psi = 0$ şeklindedir. Burada

$$\Box = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Buna Klein-Gordon denklemi de denir. Aynı zamanda bu denklemi göz önüne alarak öncelikle silindir geometride çözümlerini inceleyeceğiz. Kütlesiz skaler alanın silindir geometrisindeki çözümlerinin Bessel fonksiyonlarıyla nasıl ifade edildiğini yeniden elde edeceğiz.

i) 2.1. Silindir Geometride Kütlesiz Skaler Alan

Ψ kütlesiz skaler alan olmak üzere alan denklemimiz $\Box \Psi = 0$ olmak üzere $\Box$'yi açık haliyle yazarsak;

$$\left\{\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\Psi(\vec{r},t) = 0 \quad \text{olur.} \tag{4.1.1}$$

Silindir geometriye ait değişkenlerimiz

$\vec{r} = \vec{r}(r,\phi,z)$

$0 \le r < \infty$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $-\infty \le z < \infty$ dir. Silindirik koordinatları kullanarak alan denklemimizi yazarsak

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\Psi(r,\phi,z,t)=0 \quad . \tag{4.1.2}$$

olur. Burada değişken ayırma yöntemini uygulayalım.

$$\Psi(r,t)=R(r)\Phi(\phi)Z(z)T(t) \tag{4.1.3}$$

için (4.1.2) denklemi gerekli düzenlemeler sonucunda

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+\frac{d^2}{dz^2}-\frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=0 \tag{4.1.4}$$

şeklini alır. Burada $\Phi(\phi)$, $Z(z)$ ve $T(t)$'yi sağlayan denklemlerin ayrı ayrı çözümlerinin sonucunda

$$F_n=e^{in\phi}e^{ikz}e^{-i\omega t} \tag{4.1.5}$$

bulunur.

$k^2+\frac{\omega^2}{c^2}=\beta^2$ olmak üzere (4.1.4) denklemimiz

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}+r\frac{dR(r)}{dr}-\left(\beta^2r^2+n^2\right)R(r)=0 \tag{4.1.6}$$

şeklini alır. Burada radyal denklemin çözümünü elde etmek için yeni bir değişken tanımlayalım.

$\beta r=x$ için (4.1.6) nolu denklem

$$x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2}+x\frac{dR(x)}{dx}-\left(x^2+n^2\right)R(x)=0 \tag{4.1.7}$$

şekline dönüşür. Bu denklemin çözümü için EK-B'deki Bessel fonksiyonlarının çözümlerinden yararlanırız. Böylece $\beta r=x$ olmak üzere

$$R(r) = A_n I_n(\beta r) + B_n K_n(\beta r)$$

$$R(r) = A_n I_n\left(\sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}\, r\right) + B_n K_n\left(\sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}\, r\right) \tag{4.1.8}$$

bulunur. Bu durumda genel çözüm:

$$\Psi(r,\mathrm{t}) = \left[A_n I_n\left(\sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}\, r\right) + B_n K_n\left(\sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}\, r\right)\right] e^{ikz} e^{in\phi} e^{-i\omega t} \tag{4.1.9}$$

olur. Burada k $-\infty < k < +\infty$ aralığında tanmlıdır.

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$

ii) Silindir Geometride Elektromanyetik Alan Denklemleri

Silindir geometrinin simetrik yapısından dolayı 2. Bölümde elde ettiğimiz sonuçları bu kez de kaynaksız boş uzayda yazılmış Maxwell denklemlerinde elektrik ve magnetik alanı tanımlayarak elde edelim.

Kaynaksız boş uzayda yazılmış Maxwell denklemleri;

1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell denklemlerini, bunların vektör özelliklerini kullanarak yazarsak;

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0 \qquad (4.2.1)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemlere matematiksel olarak vektör alan denklemleri denir. Burada $\vec{E}$ elektirik alanı ve $\vec{B}$ de magnetik alanı temsil eder. Burada vektör alanın sağladığı diferansiyel denklemi çözelim. Her bir vektörel büyüklük, seçilen geometriye göre bağımsız bileşenlerden oluşur. Öncelikle seçtiğimiz geometri silindir geometri olduğundan vektörel alanımızı ($\vec{E}$, $\vec{B}$) bileşenleri cinsinden tanımlayalım.

Elektrik alan için;

$$\vec{E} = \widetilde{E}_r\hat{r} + \widetilde{E}_\phi\hat{\phi} + \widetilde{E}_z\hat{k}$$

$$\vec{E} = \overline{\overline{E}}(r,\phi,z)f(t) \qquad (4.2.2)$$

Manyetik alan için;

$$\vec{B} = \widetilde{B}_r\hat{r} + \widetilde{B}_\phi\hat{\phi} + \widetilde{B}_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = \overline{\vec{B}}\,(r,\phi,z)f(t) \qquad (4.2.3)$$

olarak tanımlı olsun. Burada $\hat{r},\hat{\phi}$ ve $\hat{k}$ silindir koordinatların birim vektörleridir. Şimdi $\vec{E} = \overline{\overline{E}}(r,\phi,z)f(t)$ 'yi (4.2.1) denkleminde yazalım.

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\overline{\overline{E}}(r,\phi,z)f(t) = 0 \qquad (4.2.4)$$

$\varpi^2 c^2 = \omega^2$ için $f(t) = e^{-i\omega t}$ elde edilir.

Böylece elektrik ve magnetik alanı zamansal ve uzaysal olarak iki fonksiyonun çarpımı şeklinde ifade etmiş olduk.

$$\vec{E} = (E_r\hat{r} + E_\phi\hat{\phi} + E_z\hat{k})e^{-i\omega t} \text{ olur.} \qquad (4.2.5)$$

Manyetik alan için (4.2.4) denklemini oluşturduğumuz şekilde işlem yapıldığında

$$\vec{B} = (B_r\hat{r} + B_\phi\hat{\phi} + B_z\hat{k})e^{-i\omega t} \qquad (4.2.6)$$

olarak hesaplanır. Şimdi Maxwell denklemlerinin üçüncüsünü göz önüne alarak sağladığı büyüklükleri inceleyelim.

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ denklemini silindir koordinatlar için yazarsak

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left\{ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \right)\hat{r} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(rE_\phi) - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right)\hat{k} \right\} e^{-i\omega t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(B_r \hat{r} + B_\phi \hat{\phi} + B_z \hat{k} \right) e^{-i\omega t} \qquad (4.2.7)$$

olur. Ortak birim vektörler birbirleriyle eşleştirildiğinde

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = i\omega B_r$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega B_\phi \qquad (4.2.8)$$

$$\frac{1}{r}E_\phi + \frac{\partial E_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \phi} = i\omega B_z$$

denklemlerini buluruz. Aynı işlemleri Maxwell denklemlerinin dördüncüsüne uygularsak;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left\{ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right)\hat{r} + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)\hat{\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(rB_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right)\hat{k} \right\} e^{-i\omega t}$$

$= \mu\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\left(E_r \hat{r} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{k} \right) e^{-i\omega t}$ için;

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\omega E_r$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = -i\mu\varepsilon\omega E_\phi \qquad (4.2.9)$$

$$\frac{1}{r}B_\phi + \frac{\partial B_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} = -i\mu\varepsilon\omega E_z$$

sonuçlarını elde ederiz. (4.2.8) ve (4.2.9) denklemlerini bir adım daha ilerletirsek

(1) $\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{E}_z}{\partial \phi} - (ik)\hat{E}_\phi = i\omega\hat{B}_r$

(2) $ik\hat{E}_r - \frac{\partial \hat{E}_z}{\partial r} = i\omega\hat{B}_\phi$

(3) $\frac{1}{r}\hat{E}_\phi + \frac{\partial \hat{E}_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{E}_r}{\partial \phi} = i\omega\hat{B}_z$

(4) $\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial \phi} - (ik)\hat{B}_\phi = -i\mu\varepsilon\omega\hat{E}_r$

(5) $ik\hat{B}_r - \frac{\partial \hat{B}_z}{\partial r} = -i\mu\varepsilon\omega\hat{E}_\phi$

(6) $\frac{1}{r}\hat{B}_\phi + \frac{\partial \hat{B}_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{B}_r}{\partial \phi} = -i\mu\varepsilon\omega\hat{E}_z$

($\hat{E}$ ve $\hat{B}$ bileşenleri r ve ϕ 'lere bağlı fonksiyonlardır.)

şeklinde altı tane denklem elde ederiz. Amacımız $\hat{B}_\phi, \hat{B}_r, \hat{E}_r$ ve $\hat{E}_\phi$'yi $\hat{E}_z$ ve $\hat{B}_z$ cinsinden yazmaktır. Bu denklemlerden yola çıkarak

$$\hat{E}_\phi = -\frac{i}{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}\left(-\frac{k}{r}\frac{\partial \hat{E}_z}{\partial \phi} + \omega\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial r}\right) \tag{4.2.10}$$

$$\hat{B}_r = \frac{i}{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}\left(k\frac{\partial \hat{B}_z}{\partial r} - \mu\varepsilon\omega\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{E}_z}{\partial \phi}\right) \tag{4.2.11}$$

$$\hat{B}_\phi = \frac{i}{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}\left(\mu\varepsilon\omega\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r} + \frac{k}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right) \tag{4.2.12}$$

$$\hat{E}_r = \frac{i}{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}\left(k\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right) \tag{4.2.13}$$

dört bileşeni iki bileşen cinsinden yazmış oluruz.

Şimdi Maxwell denklemlerinin birincisini göz önüne alalım.

$\vec{E} = \left(\hat{E}_r\hat{r} + \hat{E}_\phi\hat{\phi} + \hat{E}_z\hat{k}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$ için

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{E}_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{E}_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial\hat{E}_z}{\partial z}\right\}e^{ikz}e^{-i\omega t} = 0$$

şeklini alır. Burada (4.2.10) ve (4.2.13) denklemleri kullanılarak

$\lambda^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k^2 = sabit$ olmak şartıyla gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\hat{E}_z}{\partial\phi^2} + \lambda^2\hat{E}_z = 0 \text{ bulunur.} \tag{4.2.14}$$

$\hat{E}_z = R(r)\Phi(\phi)$ şeklinde yeni değişkenleriyle yazarsak bu durumda (4.2.14);

$$\Phi(\phi)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}R(r)\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \lambda^2R(r)\Phi(\phi) = 0 \tag{4.2.15}$$

şekline dönüşür. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$r^2\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + r^2\lambda^2 = 0 \text{ olur.} \tag{4.2.16}$$

b $\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = -n^2$ seçimi için $\Phi(\phi) = e^{in\phi}$ sonucunu buluruz. Bu durumda (4.2.16) denklemini

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} + \left[r^2\lambda^2 - n^2\right]R(r) = 0 \tag{4.2.17}$$

olarak buluruz. Bu denklemin çözümünü EK-B'de ayrıntılarıyla tartıştık. Dolayısıyla

$R(r) = a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)$ yazabiliriz. Böylece

$$\hat{E}_z(r,\phi) = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right]e^{in\phi} \tag{4.2.18}$$

sonucunu buluruz.

Aynı işlemleri şimdi Maxwell'in ikinci yasası için yaptığımızda

$\vec{B} = \left(\hat{B}_r\hat{r} + \hat{B}_\phi\hat{\phi} + \hat{B}_z\hat{k}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$ için

$\hat{B}_z(r,\phi) = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right]e^{in\phi}$ çözümlerini elde ederiz. (4.2.19)

Şimdi elektrik ve manyetik alana ait tüm bileşenleri son halleriyle bir arada yazalım.

$$\widetilde{E}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(k\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$$

$$\widetilde{E}_\phi = \frac{i}{\lambda^2}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial\phi} - \omega\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial r}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$$

$$\widetilde{E}_z = \begin{Bmatrix} J_n(\lambda r) & r < a \\ H_n^{(1)}(\lambda r) & r > a \end{Bmatrix}e^{ikz}e^{-i\omega t}e^{in\phi} \tag{4.2.20}$$

$$\widetilde{B}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(k\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial r} - \mu\varepsilon\omega\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$$

$$\text{b}\,\widetilde{B}_\phi = \frac{i}{\lambda^2}\left(\mu\varepsilon\omega\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r}+\frac{k}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$$

$$\widetilde{B}_z = \begin{Bmatrix} J_n(\lambda r) & r<a \\ H_n^{(1)}(\lambda r) & r>a \end{Bmatrix} e^{ikz}e^{-i\omega t}e^{in\phi}$$

içerdeki çözümlerde ikinci tür Bessel fonksiyonlarını alamayız çünkü $r\to 0$ için $N_n(\lambda r)\to\infty$ olur. Böylece içerdeki çözümler Birinci Tür Bessel fonksiyonları, dışarıdaki çözümler üçüncü tür Bessel fonksiyonlarıyla yani diğer bir deyişle Henkel fonksiyonlarıyla (Üçüncü Tür Bessel Fonksiyonları) tanımlanırlar.

Şimdi TE ve TM durumda bileşenleri en genel haliyle yazalım.

TE bileşenleri	TM bileşenleri
$\widetilde{E}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(\frac{\omega}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$	$\widetilde{E}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(k\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$
$\widetilde{E}_\phi = -\frac{i}{\lambda^2}\left(\omega\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial r}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$	$\widetilde{E}_\phi = \frac{i}{\lambda^2}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$
$\widetilde{E}_z = 0$	$\widetilde{E}_z = \left[a_n J_n(\lambda r)\right]e^{ikz}e^{-i\omega t}e^{in\phi}$
$\widetilde{B}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(k\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial r}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$	$\widetilde{B}_r = \frac{i}{\lambda^2}\left(-\mu\varepsilon\omega\frac{1}{r}\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$
$\widetilde{B}_\phi = \frac{i}{\lambda^2}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial\hat{B}_z}{\partial\phi}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$	$\widetilde{B}_\phi = \frac{i}{\lambda^2}\left(\mu\varepsilon\omega\frac{\partial\hat{E}_z}{\partial r}\right)e^{ikz}e^{-i\omega t}$
$\widetilde{B}_z(r,\phi) = \begin{Bmatrix} J_n(\lambda r) & r<a \\ H_n^{(1)}(\lambda r) & r>a \end{Bmatrix} e^{ikz}e^{-i\omega t}e^{in\phi}$ (4.2.21)	$\widetilde{B}_z = 0$ (4.2.22)

Şimdi de elde ettiğimiz bu alan bileşenlerini $\widetilde{E}$ ve $\widetilde{H}$ elektrik ve magnetik şiddet durumunda yazalım. Burada λ, ε ve μ genel ifade olarak yazılmıştır. Özellikle Casimir enerji hesaplamada oldukça önemli bir yere sahip olan modların davranışlarını farklı ortamlara göre nasıl değiştiğini belirlemek istiyoruz. Örneğin ε_2, μ_2 değerlerine sahip bir ortamın içine ε_1, μ_1 değerleri ile tanımlanan silindiri bandırdığımızda alanın bileşenlerinin nasıl değiştiğini belirleyebiliriz. (4.2.20) hesaplarını kullanarak içerdeki ve dışarıdaki alanın bileşenlerini TE ve TM modlarının çizgisel toplamı şeklinde yazabiliriz.

$r < a$ (içerideki noktalar) için;

$F_n = e^{ikz} e^{in\phi} e^{-i\omega t}$ olmak üzere

$$\widetilde{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n^i J_n(\lambda_1 r) \right] F_n \tag{4.2.23}$$

$$\widetilde{B}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n^i J_n(\lambda_1 r) \right] F_n$$

$\mu \vec{H} = \vec{B}$ dönüşümünden de

$$\widetilde{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[b_n^i J_n(\lambda_1 r) \right] F_n \text{ bulunur.} \tag{4.2.24}$$

(4.2.23) ve (4.2.24) denklemlerini (4.2.20) denklemlerinde yerlerine yazdığımızda

$r < a$ için elektrik ve magnetik alana ait tüm bileşenleri yazalım.

$$\widetilde{E}_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik}{\lambda_1} a_n^i J_n'(\lambda_1 r) - \frac{\omega}{\lambda_1^2} \frac{n\mu_1}{r} b_n^i J_n(\lambda_1 r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n}{\lambda_1^2} \frac{k}{r} a_n^i J_n(\lambda_1 r) + \frac{i\omega}{\lambda_1} \mu_1 b_n^i J_n'(\lambda_1 r) \right\} F_n$$

$$\hat{E}_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]e^{in\phi} \tag{4.2.25}$$

$$\widetilde{H}_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{k_1^2}{\lambda_1^2}\frac{n}{r\omega\mu_1}a_n^i J_n(\lambda_1 r) + \frac{i}{\lambda_1}kb_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\omega\mu_1}\frac{k_1^2}{\lambda_1}a_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r) - \frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{r}b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]e^{in\phi} \qquad (\lambda_1^2 = k_1^2 - k^2,\ k_1^2 = \mu_1\varepsilon_1\omega^2)$$

a_n^i (b_n^i) TM ve TE katsayılarını ifade eder

TE ve TM bileşenlerini $r < a$ için ayrı ayrı ifade edelim.

TM (B_z= 0) bileşenleri

$$\widetilde{E}_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda_1}a_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{r}a_n^i J_n(\lambda_1 r)J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]F_n$$

$$\widetilde{H}_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{k_1^2}{\lambda_1^2}\frac{n}{r\omega\mu_1}a_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\omega\mu_1}\frac{k_1^2}{\lambda_1}a_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z^i = 0 \tag{4.2.26}$$

TE (E_z= 0) bileşenleri

$$\widetilde{E}_r^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\omega}{\lambda_1^2}\frac{n}{r}b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i\omega}{\lambda_1}\frac{n}{r}b_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_z^i = 0$$

$$\widetilde{H}_r^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda_1}b_n^i J_n^{'}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi^i = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{r}b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z^i = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_n^i J_n(\lambda_1 r)\right]e^{in\phi} \tag{4.2.27}$$

bulunur. $\widetilde{H}_n^{(1)}(x)$ şeklindeki üçüncü tür Bessel fonksiyonu olarak da bilinen Henkel fonksiyonu $\widetilde{H}_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x)$ biçiminde gösterilir. Şimdi $r > a$ için $\widetilde{E}$ ve $\widetilde{H}$'nin bileşenlerini yazarken Henkel fonksiyonunun gösteriminden yararlanacağız. Çünkü $r \to 0$ iken $\widetilde{H}_n^{(1)}(x) \to \infty$ olacağından $r < a$ için yaptığımız tartışmada Henkel fonksiyonu dahil değildir.

$\widetilde{E}_z = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right] F_n$ ve $\widetilde{B}_z = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right] F_n$'dir.

$r > a$ için;

$\widetilde{E}_z = \left[a_n J_n(\lambda r) + b_n N_n(\lambda r)\right] F_n$ denklemleri üzerinde gerekli işlemler yapılarak Henkel fonksiyonlarına benzetilir. Bu durumda

$$\widetilde{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(\lambda r) F_n \tag{4.2.28}$$

$\widetilde{B}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(\lambda r) F_n$ olur.

$\widetilde{B} = \mu \widetilde{H}$ eşitliği kullanırsak

$$\widetilde{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(1)}(\lambda r) F_n \text{ dönüşür.} \tag{4.2.29}$$

$\widetilde{E}$ ve $\widetilde{B}$'nin $r > a$ için tüm bileşenleri

$$\widetilde{E}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik}{\lambda} a_n H_n^{(1)'}(\lambda r) - \frac{\omega\mu}{\lambda^2} \frac{n}{r} b_n H_n^{(1)}(\lambda r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n}{\lambda^2} \frac{k}{r} a_n H_n^{(1)}(\lambda_1 r) + \frac{i\omega}{\lambda} \mu b_n H_n^{(1)'}(\lambda r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n H_n^{(1)}(\lambda r) \right] F_n \tag{4.2.30}$$

$$\widetilde{H}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\omega\varepsilon}{\lambda^2}\frac{n}{r}a_n H_n^{(1)}(\lambda r)+\frac{ik}{\lambda}b_n H_n^{(1)'}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{i\frac{\omega\varepsilon}{\lambda}a_n H_n^{(1)'}(\lambda r)-\frac{n}{\lambda^2}\frac{k}{r}b_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right]F_n$$

elde etmiş oluruz. Burada da a_n katsayıları TM bileşenlerini b_n katsayıları ise TE temsil eder. Şimdi $r > a$ için TM ve TE durumlarını ayrı ayrı yeniden yazalım.

TM için ($\widetilde{B}_z = 0$) bileşenleri

$$\widetilde{E}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda}a_n H_n^{(1)'}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{n}{\lambda^2}\frac{k}{r}a_n H_n^{(1)}(\lambda_1 r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right]F_n$$

$$\widetilde{H}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\omega\varepsilon}{\lambda^2}\frac{n}{r}a_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{i\frac{\omega\varepsilon}{\lambda}a_n H_n^{(1)'}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z = 0 \qquad (4.2.31)$$

TE için ($\widetilde{E}_z = 0$) bileşenleri

$$\widetilde{E}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{\omega}{\lambda^2}\frac{n\mu}{r}b_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i\omega\mu}{\lambda}b_n H_n^{(1)'}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{E}_z = 0$$

$$\widetilde{H}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{ik}{\lambda}b_n H_n^{(1)'}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{n}{\lambda^2}\frac{k}{r}b_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right\}F_n$$

$$\widetilde{H}_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[b_n H_n^{(1)}(\lambda r)\right]F_n \qquad (4.2.32)$$

Bulduğumuz bu sonuçlar λ, μ ve ε için genel ifade edilmiş denklemlerdir. Şimdiki problemimiz $r > a$ için ε_2, μ_2 değerlerine sahip silindirin bu ortamdaki alanın

bileşenlerini, TE ve TM modlarını hesaplamaktır. Şimdi $r > a$ durumunda $\widetilde{E}^e, \widetilde{H}^e$ bileşenleri yazalım.

$$\widetilde{E}_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik}{\lambda_2} a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) - \frac{\omega}{\lambda_2^2} \frac{n\mu_2}{r} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{E}_\phi^e = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n}{\lambda_2^2} \frac{k}{r} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) + \frac{i}{\lambda_2} \omega\mu_2 b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{E}_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \right] F_n \qquad (4.2.33)$$

$$\widetilde{H}_r^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{k_2^2}{\lambda_2^2} \frac{n}{\omega\mu_2} \frac{1}{r} a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) + \frac{i}{\lambda_2} k b_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{H}_\phi^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{i}{\omega\mu_2} \frac{k_2^2}{\lambda_2} a_n^e H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) - \frac{n}{\lambda_2^2} \frac{k}{r} b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \right\} F_n$$

$$\widetilde{H}_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[b_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 r) \right] F_n \qquad (\ \lambda_2^2 = k_2^2 - k^2,\ k_2^2 = \mu_2 \varepsilon_2 \omega^2\ )$$

a_n^e (b_n^e) TM ve TE katsayılarını ifade eder)

İçerdeki ve dışarıdaki alanın teğetsel bileşenleri $r = a$'da süreklilik şartını sağlaması gerektiğini Bölüm 2'de tartışmıştık. Bu durumda

$\left(\widetilde{E}_z^i\right)_{r=a} = \left(\widetilde{E}_z^e\right)_{r=a}$, $\left(\widetilde{E}_\phi^i\right)_{r=a} = \left(\widetilde{E}_\phi^e\right)_{r=a}$ ve $\left(\widetilde{H}_z^i\right)_{r=a} = \left(\widetilde{H}_z^e\right)_{r=a}$, $\left(\widetilde{H}_\phi^i\right)_{r=a} = \left(\widetilde{H}_\phi^e\right)_{r=a}$

denklemlerini elde ederiz. Süreklilik şartları uygulandığında katsayılar ile bileşenler arasında

$$a_n^i J_n(\lambda_1 a) - a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 a) = 0$$

$$\frac{kn}{\lambda_1^2 a} J_n(\lambda_1 a) a_n^i - \frac{kn}{\lambda_2^2 a} H_n^{(1)}(\lambda_2 a) a_n^e + \frac{i\omega\mu_1}{\lambda_1} J_n'(\lambda_1 a) b_n^i - \frac{i\omega\mu_2}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) b_n^e = 0$$

$$a_n^i J_n(\lambda_1 a) - a_n^e H_n^{(1)}(\lambda_2 a) = 0$$

$$\frac{i}{\mu_1 \omega}\frac{k_1^2}{\lambda_1} a_n^i J_n^{'}(\lambda_1 a) - \frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) a_n^e - \frac{n}{\lambda_1^2}\frac{k}{a} J_n(\lambda_1 a) b_n^i + \frac{n}{\lambda_2^2}\frac{k}{a} H_n^{(1)}(\lambda_2 a) b_n^e = 0$$

şeklinde ilişkiler elde edilir. Matris ve determinant yöntemiyle bu denklemlerin çözümünü (Bkz. Bölüm 2 denk. (2.1.20))

$f_n(k_z, \omega, a) = 0$ olmak üzere

$$f_n = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) \Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a)$$

$$- n^2 k^2 \omega^2 (\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2)^2 \left(J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) \right)^2 \qquad (4.2.34)$$

$$\Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\mu_1 \lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) - a\mu_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \qquad (4.2.35)$$

$$\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\varepsilon_1 \lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) - a\varepsilon_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \text{ 'dir.} \qquad (4.2.36)$$

Bu sonuçlar Bölüm 2'de Hertz vektörü yardımıyla elde ettiğimiz (2.1.22), (2.1.23) ve (2.1.24) sonuçlarıyla aynıdır. Aynı sonuçları farklı yöntemlerle elde etmemiz silindirin simetrik özelliğinden kaynaklanır.

EK-B

BESSEL FONKSİYONLARI

Silindirik koordinatlarda yazılmış ν . mertebeden verilmiş

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)y(x)=0 \tag{5.1.1}$$

şeklindeki Bessel Diferansiyel denkleminin çözümünü Frobenius yöntemini kullanarak buluruz. Öncelikle bu denklemin düzgün tekil noktalarını belirleyelim.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)y(x)=0 \text{ ise} \tag{5.1.2}$$

x^2=0 ise $x_{1,2}=0\rightarrow$denklemin tekil noktalarıdır. (5.1.2)'i aynı zamanda

$y''(x)+y'(x)+\frac{1}{x^2}\left(x^2-\nu^2\right)y(x)=0$ kanonik formda da gösterilebilir.

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+R(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y(x)=0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y(x)=0$ ise

$$p(x)=\frac{1}{x};\quad q(x)=\frac{1}{x^2}\left(x^2-\nu^2\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\begin{Bmatrix}xp(x)\\x^2q(x)\end{Bmatrix}$$

limiti sonlu kalıyorsa, $x=0$ noktası düzgün tekil noktadır. Yani analitiktir. Bu denklemde limitimiz sonlu kaldığından $x=0$ noktası düzgün tekil noktadır. Bu durumda Frobenius yöntemi gereğince

$y(x)=\sum_{s=0}^{\infty}a_s x^{s+r}$ ($a_0\neq 0$) çözüm olsun.

$y'(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(s+r)a_s x^{s+r-1}$

$y''(x)=\sum_{s=0}^{\infty}(s+r)(s+r-1)a_s x^{s+r-2}$ olur.

$y(x)$, $y'(x)$ ve $y''(x)$ 'yi (2.2.12)'de yerlerine yazıp düzenlersek

$$(r-\nu)(r+\nu)a_0x^r+(r+1-\nu)(r+1+\nu)a_1x^{r+1}+\sum_{s=2}^{\infty}\left[(s+r-\nu)(s+r+\nu)a_s+a_{s-2}\right]x^{s+r}=0$$

buluruz. Şimdi indis köklerini hesaplayalım,

$(r-\nu)(r+\nu)a_0=0$ denkleminde $a_0\neq 0$ için $r=\pm\nu$ bulunur.

$(r+1-\nu)(r+1+\nu)a_1=0$ denkleminde ise $r=\pm\nu$ için $a_1=0$ olur. Katsayılar arasındaki ilişkiyi incelediğimizde

$a_s=\dfrac{-1}{(s+r-\nu)(s+r+\nu)}a_{s-2}$ bulunur. ($s\geq 2$)

$r=\nu$ için; s 'nin $s=2,4,6...$ (çift) değerlerini saydırıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$a_{2s}=\dfrac{(-)^s\nu!}{2^{2s}s!(s+\nu)!}a_0$ bulunur. Bu durumda $r=\nu$ için $y(x)$ 'in çözümü

$$y(x)=x^{\nu}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-)^s\nu!a_0}{2^{2s}s!(s+\nu)!}x^{2s} \qquad (5.1.3)$$

olacaktır. $y(x)$ 'i bir yerden kesmek zorunda kalmadık. Çünkü $a_0>a_2$ olduğundan ifademiz küçülüyor.

$a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\nu!}$ seçersek (5.1.3) denklemi

$J_{\nu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \dfrac{(-)^s}{2^{2s}\, s!(s+\nu)!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2s+\nu}$ şeklinde ν üncü mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonuna dönüşür. Bu durumda genel çözüm

$y(x) = A_n J_{\nu}(x) + B_n N_{\nu}(x)$ 'dir. (5.1.4)

Burada $J_{\nu}(x)$ ν üncü mertebeden Birinci tür Bessel fonksiyonu ve $N_{\nu}(x)$ de İkinci tür Bessel fonksiyonudur $\left[Abromowitz\ ve\ Stegun, 1964\right]$. x 'in kompleks değerleri için

$$I_n(x) = i^n J_n(ix)$$

$$K_n(x) = i^{n+1}\frac{\pi}{2} H^{(1)}{}_n(ix) \tag{5.1.5}$$

modifiye Bessel fonksiyonlar ifadesi göz önünde alındığında (5.1.4) denklemi

$$y(x) = A_n I_n(x) + B_n K_n(x) \tag{5.1.6}$$

bulunur.

Modifiye Bessel fonksiyonlarının çok büyük argümanlar için asimtotik açılımları

n sabit ve $x \to \infty$ durumunlar için $\mu = 4n^2$ olmak üzere,

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1 - \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\} \quad , \left(\ |\arg x| < \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left\{1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \ldots\right\} \quad , \left(\ |\arg x| < \frac{3}{2}\pi\right)$$

(5.1.7)

$$I_n'(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1-\frac{\mu+3}{8z}+\frac{(\mu-1)(\mu+15)}{2!(8z)^2}-\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu+35)}{3!(8z)^3}+\ldots\right\} \quad , \left(\ |\arg x| < \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$K_n'(x) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left\{1+\frac{\mu+3}{8z}+\frac{(\mu-1)(\mu+15)}{2!(8z)^2}+\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu+35)}{3!(8z)^3}+\ldots\right\} \ , \left(\ |\arg x| < \frac{3}{2}\pi\right)$$

(5.1.8)

denklemlerine sahibiz. Bunların birbirleriyle çarpım ifadeleri ise

$$I_n(x)K_n(x) \approx \frac{1}{2z}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{\mu-1}{(2z)^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{(\mu-1)(\mu-9)}{(2z)^4}-\ldots\right\}, \qquad \left(\ |\arg x| < \frac{1}{2}\pi\right) \tag{5.1.9}$$

$$I_n'(x)K_n'(x) \approx -\frac{1}{2z}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\mu-3}{(2z)^2}-\frac{1.1}{2.4}\frac{(\mu-1)(\mu-45)}{(2z)^4}+\ldots\right\}, \quad \left(\ |\arg x| < \frac{1}{2}\pi\right) \tag{5.1.10}$$

olarak elde edilir[*Abromowitz ve Stegun*,1964].

$x =$ sabit ve n □¨ □; için modifiye Bessel fonksiyonlarının uniform asimtotik açılımları ise

$t = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ ve $\eta = \sqrt{1+z^2} + \ell n \dfrac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$ olmak üzere

$$I_n(nz) \approx \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\frac{e^{\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{5.1.11}$$

$$K_n(nz) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{e^{-\nu\eta}}{(1+z^2)^{1/4}}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k\frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{5.1.12}$$

$$I_n'(nz) \approx \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}e^{\nu\eta}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{5.1.13}$$

$$K_n'(nz) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{(1+z^2)^{1/4}}{z}e^{-\nu\eta}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k\frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{5.1.14}$$

şeklindedir $\left[Abromowitz\ ve\ Stegun, 1964\right]$. Hankel fonksiyonları (Üçüncü Tür Bessel Fonksiyonları) ise

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \tag{5.1.15}$$

şeklindedir. İkinci tür Hankel fonksiyonu da

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x) \tag{5.1.16}$$

olarak yazılır.

Küresel koordinatlarda yazılmış

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(k^2x^2 - \ell(\ell+1)\right)y(x) = 0 \tag{5.1.17}$$

şeklindeki Bessel diferansiyel denkleminin çözümü yine Frobenius yöntemiyle yapıldığında sonuç olarak

$$y(x) = A_n x^{-1/2} J_{\ell+1/2}(kx) + B_n x^{-1/2} N_{\ell+1/2}(kx) \tag{5.1.18}$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem aynı zamanda

$$y(x) = A\, j_\ell(kx) + B\, y_\ell(kx) \tag{5.1.19}$$

olarak da yazabiliriz. Burada

$j_\ell(kx)$ küresel koordinatlarda Birinci Tür Bessel fonksiyonu ve $y_\ell(kx)$ de İkinci Tür Bessel fonksiyonudur. Küresel Bessel fonksiyonlarının Hankel fonksiyonları türünden ifadeleri ise

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + iy_\ell(x) \tag{5.1.20}$$

$$h_\ell^{(2)}(x) = j_\ell(x) - iy_\ell(x) \tag{5.1.21}$$

şeklindedir.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Sivas'ta doğdum. İlköğretimimi birincilikle bitirdikten sonra 2004 yılında 75. Yıl Cumhuriyet Lisesi (YDA)'den mezun oldum. Aynı yıl içerisinde Trakya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü kazandım. Bölümü % 10'luk başarı diliminde tamamladıktan sonra 2008 yılında aynı üniversitede başlamış olduğum yüksek lisans eğitimimi 2010 yılında tamamlamış oldum. Akademisyen olma hedefimi gerçekleştirebilmek için bundan sonraki adımda da doktora programına başlayarak eğitimime devam edeceğim.