T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELMHOLTZ DENKLEMİNİN PROLATE KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİNDE AYRIŞTIRILMASI VE UYGULAMALARI

Pınar NAYİR

Yüksek Lisans Tezi

Danışman:
Yrd. Doç. Dr. Cengiz DANE

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELMHOLTZ DENKLEMİNİN PROLATE KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİNDE AYRIŞTIRILMASI VE UYGULAMALARI

PINAR NAYİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. CENGİZ DANE

2007

ÖZET

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Uygulamalı Matematiğin bir dalı olup bu denklemlerin Temel Bilimler ve Mühendisliğin her dalında pek çok uygulaması vardır.

Örneğin, belli bir ortamda zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar Kısmi Diferansiyel Denklemler yardımı ile incelenebilmektedir. Fiziksel bir olayı, Kısmi Türevli Denklemler yardımıyla matematiksel olarak ifade etmek mümkündür. Elde edilen denklemlerin değişik koordinat sistemlerinde çözümleri yapılmaktadır.

Bu çalışmanın I. Bölümünde Diferansiyel Denklemlerle ilgili genel bilgiler verilmiş, Kısmi Diferansiyel Denklemlerle ilgili genel kavramlar ve sınıflandırma yapılarak, Dalga, Poisson, Laplace ve Difüzyon Denklemleri tanıtılmıştır.

II. Bölümde eliptik bir Kısmi Diferansiyel Denklem olan Skaler Dalga Denkleminin Prolate Küresel Koordinatlarda ayrıştırılması yapılmış ve çözüm kümesi ile öz değerleri irdelenmiştir.

III. Bölümde Prolate Küresel Koordinat Sisteminde Kütle Difüzyon Denkleminin çözümünün nasıl yapılacağı irdelenmiş ve nem transferini tanımlayan analitik çözümler verilmiştir.

IV. Bölümde Bessel ve Legendre Fonksiyonlarının temel özellikleri ile diğer özel fonksiyonlarla aralarındaki bağıntılar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eliptik, Skalar Dalgalar, Difüzyon Denklemi, Prolate.

SUMMARY

Partial Differential Equations, a branch of applied Mathematics, have many applications in basic science and every branch of engineering.

For example, physical events such as time independent heat diffusion in a certain environment, time dependent heat diffusion and different types of wave diffusion can be examined by means of Partial Differential Equations. It is possible to represent a physical event with a mathematical statement by the help of Partial Differential Equations. Obtained equations are solved in different coordinate systems.

In this study, in Part I, general informations are given related with Differential Equations and by giving general concepts and classifications related with Partial Differential Equations, Wave, Poisson, Laplace and Diffusion Equations are presented.

In Part II, Scalar Wave Equation which is an Elliptic Partial Differential Equation is separated in Prolate Spheroidal Coordinates and the solution set and eigenvalues are examined.

In Part III, it is examined that how is to be solved Mass Diffusion Equation in the Prolate Spheroidal Coordinate System and given an analytical solution to describe the moisture transport.

In Part IV, basic properties of the Bessel and Legendre Functions and their relationship between the other special functions are given.

Key Words: Elliptical, Scalar Waves, Diffusion, Prolate.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her türlü yardımlarını esirgemeyen ve çalışmamın ortaya çıkmasında emeği geçen hocam Yrd.Doç.Dr.Cengiz DANE' ye teşekkürlerimi sunarım.

Hem yardımları hem de manevi destekleriyle yanımda olan başta Prof.Dr. Hülya İŞCAN olmak üzere tüm Matematik Bölümüne şükranlarımı sunarım.

Ayrıca en başından beri beni destekleyen ve daima yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET…… i

SUMMARY……. ii

ÖNSÖZ…… iii

I. BÖLÜM

1.1 Giriş…… 1

1.2 Genel Bilgiler……. 2

II. BÖLÜM

2.1 Skaler Dalga Denkleminin Prolate Küresel Koordinatlarda Ayrıştırılması……. 11

III. BÖLÜM

3.1 Prolate Küresel Koordinat Sisteminde Kütle Difüzyon Denklemi.. 24

IV. BÖLÜM

4.1 Bessel Fonksiyonları…….. 32

4.1.1 Bessel Diferansiyel Denklemi Ve Bessel Fonksiyonları……... 32

4.1.2 Bessel Fonksiyonları İçin, Rekürans Bağıntıları, Türev Formülleri Ve Bazı Gösterimler…….. 38

4.2 Legendre Fonksiyonları……. 41

4.2.1 Legendre Diferansiyel Denklemi Ve Legendre Fonksiyonları….. 41

4.2.2 Legendre Fonksiyonları İçin Rekürans Bağıntıları, Özel İfadeler Ve Bazı Gösterimler…….. 50

TARTIŞMA……. 60

KAYNAKLAR…… 61

ÖZGEÇMİŞ…… 63

I.BÖLÜM

1.1 GİRİŞ

İnsanoğlu tarih boyunca doğa olaylarını ve evreni açıklamak için büyük çaba sarf etmiştir. Bir yandan uzak gök cisimlerinin hareketlerini öte yandan atom altı parçacıkların hareketini açıklamaya çalışmışlardır.

Doğa sistemlerinin matematiksel modellerle karakterize edilmesi söz konusu olduğunda genellikle diferansiyel denklemler veya diferansiyel denklem sistemleriyle karşılaşırız. Matematiksel modelleme yöntemi; genel olarak, bir gerçek dünya probleminin matematik formüllerle ifade edilmesi, yani bir matematiksel modelin kurulması, ortaya çıkan matematiksel problemin çözümü ve analizi, matematiksel sonuçların, orijinal gerçek dünya olayı açısından yorumu, şeklinde özetlenir.

Bir doğa olayının yapısı ile kısmi diferansiyel denklem oluşturmak, uygulamalı matematiğin güç konularından biri ve aynı zamanda analizin klasik bir dalıdır.

Diferansiyel Denklemlerin, Mühendislik Bilimlerinden Sosyal Bilimlere kadar uzanan geniş bir uygulama alanı vardır.

Matematik modellerle ifade edilen ve diferansiyel denklemlere dönüştürülen olayların analizi, bu olayları temsil eden diferansiyel denklemler yada denklem sistemlerinin çözümü olan fonksiyonların incelenmesi ile yapılır. Eğer basit hareketleri temsil eden diferansiyel denklemler ya da denklem sistemleri ile karşı karşıyaysak bunlar genellikle lineer denklemlerdir ve genel çözümü analitik fonksiyonlardan oluşan bir uzay belirtir. Analitik çözümün bulunması demek ele alınan sistemin tamamen bilinmesi demektir. Eğer doğa olayını temsil eden diferansiyel denklem veya denklem sistemleri nonlineer ise genellikle bu tip denklemlerin analitik çözümleri azdır veya yoktur. Bu sistemlerin çözümleri nümerik yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanır.

Örneğin, Elektromanyetik radyasyon, Sismoloji, Akustik gibi Fizik ve Uygulamalı Bilimlerde karşılaşılan

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\phi(x, y, z) = 0$$

Helmholtz Denklemi ve onun uygulaması olarak kurutma işlemlerinde karşılaşılan Kütle Difüzyon Denklemi yada Sıvı Difüzyon Denklemi önemlidir. Bu tür denklemlerin çözümlerinin geniş bir uygulama alanı vardır. Günümüzde Uygulamalı Bilimlerde bu tür problemlerin çözümleri yapılmaktadır.

Bu çalışmada Helmholtz Denkleminin $k^2 > 0$ için dönüştüğü Skaler Dalga Denkleminin Prolate Küresel Koordinatlarda ayrıştırması yapılarak genel çözüm irdelenmiştir. Ayrıştırma sonucunda ortaya çıkan Bessel ve Legendre Diferansiyel Denklemlerinden Legendre Denklemi irdelenmiş ve özdeğerler hesaplanmıştır. Ayrıca $m = 0$ durumu için örnek olarak Kütle Difüzyon Denklemi incelenerek, Legendre ve Bessel özel fonksiyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

1.2 GENEL BİLGİLER

Bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların türevlerini içeren bağıntılara diferansiyel denklem denir.

Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme "Bayağı Diferansiyel Denklem", iki yada daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme "Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin mertebesine diferansiyel denklemin "Mertebesi" , denklemdeki en yüksek mertebeli türevin cebirsel derecesine denklemin "Derecesi" denir.

Diferansiyel denklemlerin; genel, özel ve tekil olmak üzere üç tür çözümünden bahsedilebilir. n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde n tane keyfi sabit vardır. Genel çözümlerde sabitlere özel değerler verilerek özel çözümler elde edilir. Bazen diferansiyel denklemi sağlayan ancak genel çözümlerden elde edilemeyen bir veya birkaç çözüm ile karşılaşılabilir. Bu çözümlere de tekil çözümler denir.

ϕ bağımlı, x,y bağımsız değişkenler olmak üzere, bir Kısmi Diferansiyel Denklem genel olarak,

$$F\left(x, y, ..., \phi, \phi_x, \phi_y, ..., \phi_{xx}, \phi_{yy}, ...\right) = 0 \tag{1.2.1}$$

şeklindedir.

n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\phi = \phi(x)$ olmak üzere,

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \phi, \phi_{x_1}, ..., \phi_{x_n}, \phi_{x_1 x_1}, \phi_{x_1 x_2}, ...\right) = 0 \tag{1.2.2}$$

formundadır.

Bir Kısmi Diferansiyel Denklemdeki bağımlı değişken ve bunların denklemdeki tüm kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme "Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

İki bağımsız değişkenli birinci mertebeden bir lineer denklem,

$$P(x, y)\,\phi_x + Q(x, y)\,\phi_y + R(x, y)\,\phi = S(x, y) \tag{1.2.3}$$

biçiminde, iki bağımsız değişkenli ikinci mertebeden bir lineer denklem,

$$A(x, y)\,\phi_{xx} + B(x, y)\,\phi_{xy} + C(x, y)\,\phi_{yy} + D(x, y)\,\phi_x + E(x, y)\,\phi_y + F(x, y)\,\phi = G(x, y) \tag{1.2.4}$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer bir Kısmi Diferansiyel Denklem, o denklemde bulunan en yüksek mertebeli kısmi türevlere göre lineer ise, denkleme "Yarı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

Birinci mertebeden iki bağımsız değişkenli yarı lineer denklem,

$$P(x, y, \phi)\,\phi_x + Q(x, y, \phi)\,\phi_y = R(x, y, \phi) \tag{1.2.5}$$

biçiminde, ikinci mertebeden yarı lineer denklem de,

$$A\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right)\phi_{xx}+B\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right)\phi_{xy}+C\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right)\phi_{yy}+D\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right)=0 \quad (1.2.6)$$

şeklinde gösterilir.

Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ise ve denklemde görülen en yüksek mertebeli türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu ise denkleme "hemen hemen Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli hemen hemen lineer denklem,

$$A\left(x,y\right)\phi_{xx}+B\left(x,y\right)\phi_{xy}+C\left(x,y\right)\phi_{yy}+D\left(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y\right)=0 \quad (1.2.7)$$

şeklindedir.

Bir diferansiyel denklemin bilinmeyen katsayılar içeren genel çözümünü bulmak bazen yeterlidir. Bazı durumlarda ise diferansiyel denklemin belirli koşulları sağlayan çözümlerinin bulunması gerekir. Bu koşullar genellikle problemin yapısında vardır veya doğrudan denklemle birlikte verilir. Eğer koşullar yalnız bir noktaya ait özel koşullar ise başlangıç koşulları, eğer iki veya daha fazla noktayı kapsayan koşullar ise sınır koşulları olarak adlandırılır.

Başlangıç koşullarına bağlı olarak çözülen problemlere başlangıç değer problemi yada Cauchy problemi, sınır koşullarına bağlı olarak çözülen problemlere sınır değer problemi, sınır koşullarının yanı sıra başlangıç koşulları da verilirse, bu koşullara göre verilen problemlere başlangıç sınır değer problemi denir.

İkinci mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemleri üç temel bölümde sınıflandırabiliriz.

$$A\phi_{xx}+B\phi_{xy}+C\phi_{yy}+D\phi_x+E\phi_y+F\phi=0 \quad (1.2.8)$$

karakteristik denkleminin, sol tarafını dx , dy diferansiyelleri cinsinden bir kuadratik form gibi düşünürsek,

$$Q\left(dx,dy\right)=A\left(dy\right)^2-B\left(dx\right)\left(dy\right)+C\left(dx\right)^2 \quad (1.2.9)$$

elde edilir. Bu formun belirlediği geometrik eğriler yardımıyla ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri sınıflara ayırmak mümkündür.

Lineer denklemler için; belirli bir (x , y) noktasında A, B, C sabit değerler alır.

Q (dx, dy) = 1 olsun. Bu durumda verilen (x , y) noktası ile ilgili olarak Q=1 kuadratik denklemi dx - dy düzleminde konikleri belirler. Yani x - y düzlemindeki her noktaya karşılık dx - dy düzleminde bir konik eğri bulunur. Bu durumda koniğin cinsi Q(dx, dy)'nin katsayılarına bağlıdır.

Buna göre,

i) B^2 - 4AC > 0 ise kökler reel ve farklıdır. Yani Q=1 denklemi bir hiperbol belirler.

ii) B^2 - 4AC = 0 ise kökler reel ve aynıdır. Yani Q=1 denklemi bir parabol belirler.

iii) B^2 - 4AC < 0 ise kökler karmaşık eşlenik sayılardır. Yani Q=1 denklemi bir elips belirler.

Böylece (1.2.8) Kısmi Diferansiyel Denklemi,

i) B^2 - 4AC > 0 ise Hiperbolik,

ii) B^2 - 4AC = 0 ise Parabolik,

iii) B^2 - 4AC < 0 ise Eliptik

olarak sınıflandırılır.

Helmholtz Denkleminde $\phi(x, y, z)$ merkezi orijinde bulunan ve kenar uzunluğu a ve orijindeki değeri

$$\phi_0 = \phi\,(0,0,0) \tag{1.2.10}$$

olan küp içinde tanımlı bir skaler alan olsun. Küpün içindeki bir noktada bu skaler alanın ortalama değeri

$$\overline{\phi}\,(x,\,y,\,z) = \frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\phi\,(x,\,y,\,z)\,dx\;\;dy\;\;dz \tag{1.2.11}$$

ifadesi ile verilir. $\phi(x,y,z)$, $x_0 = (0,0,0)$ noktası civarında kuvvet serisine açılır ve serinin yüksek mertebeden terimleri ihmal edilerek bulunan açılım (1.2.11) de kullanılırsa

$$\overline{\phi}\,(x,\,y,\,z) = \phi\,(0,0,0) + \frac{a^2}{24}\left\{\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2}\right\}_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} \tag{1.2.12}$$

veya

$$\overline{\phi}(x,y,z) = \phi_0 + \frac{a^2}{24}\left(\nabla^2\phi\right)_0 \tag{1.2.13}$$

bulunur. Bu ifade

$$\overline{\phi}(x,y,z) - \phi(0,0,0) = \frac{a^2}{24}\left(\nabla^2\phi(x,y,z)\right)_0 \tag{1.2.14}$$

veya

$$\left(\nabla^2\phi\right)_0 = \frac{24}{a^2}\left(\overline{\phi} - \phi_0\right) \tag{1.2.15}$$

formunda yazılır. Çünkü çok değişkenli fonksiyonlar için

$$f(x_0+h, y_0+k, ..., t_0+l) = f(x_0, y_0, ..., t_0)$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+....+\frac{\partial}{\partial t}l\right)^r f(x_0, y_0, ..., t_0)+R_n \quad (1.2.16)$$

$$(h = x-x_0, k = y-y_0, ..., l = t-t_0)$$

şeklinde alınan Taylor Teoremi $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ noktasında $\phi(x,y,z)$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\phi(x,y,z) = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 z$$
$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 z^2\right]$$
$$+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}\right)_0 yz + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)_0 xz + ... \quad (1.2.17)$$

ifadesi elde edilir. (1.2.17) Değerinin (1.2.11)'de yerine konulması ile tek kuvvette olan ifadeler sıfır ve çift kuvvetten ifadeler

$$\frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 x^2\,dxdydz = \frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0 \quad ; \quad (1.2.18)$$

$$\frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 y^2\,dxdydz = \frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0 \quad ; \quad (1.2.19)$$

$$\frac{1}{a^3}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 z^2\,dxdydz = \frac{a^2}{24}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0 \quad ; \quad (1.2.20)$$

şeklini alır. (1.2.18), (1.2.19), (1.2.20) Kullanılır ve yüksek mertebeden türevler ihmal edilirse (1.2.11)' den (1.2.15) ifadesi bulunur. (1.2.15) İfadesi $\phi(x,y,z)$ skaler alanının bir (x,y,z) noktasındaki $\overline{\phi}(x,y,z)$ ortalama değeri ile $\phi(0,0,0)$ başlangıç değeri arasındaki farkının, bu skaler alanın başlangıç noktasındaki laplasyeni ile belirleneceğini ifade eder. (1.2.15) İfadesinin sağ tarafında bulunan $\bar{\phi}-\phi_0$ farkının şekline göre uygulamalı bilimlerde çok kullanılan kısmi türevli denklemler elde edilir. Bunlardan başlıcaları ;

1- Eğer $\phi(x,y,z)$ skaler alanının bir noktadaki değeri bu nokta civarındaki ortalama değerine eşitse (1.2.15)'den Laplace Denklemi adı verilen

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.2.21}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem eliptik bir denklemdir. Buna göre, bir skaler alan, bir noktadaki değeri bu nokta civarındaki ortalama değerine eşit olma özelliğine sahipse, bu skaler alan bu noktada (1.2.21) denklemini gerçekler.

Gravitasyon, Elektrostatik ve Astronomi alanlarına ait skaler potansiyeller bu tür alanlara örnek alanlardır ve bu alanlar (1.2.21) Laplace Denklemini sağlarlar.

2- $\phi(x,y,z)$ skaler alanın bir noktadaki değeri ile bu nokta komşuluğundaki ortalama değeri arasındaki fark, bir başka $\mathrm{h}(\vec{r})$ skaler alanına eşitse (1.2.15) denklemi

$$\nabla^2\phi = \mathrm{h}(\vec{r}) \tag{1.2.22}$$

şeklini alır. ε_0 bir sabit ve $\rho(\vec{r})$ bir başka skaler alan olmak üzere

$$\nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(\vec{r}) \tag{1.2.23}$$

şeklinde yazıldığında Poisson Denklemi olarak bilinen denkleme dönüşür. Bu denklemde eliptik türden bir denklemdir.

(1.2.23) denkleminde kaynak fonksiyonu olarak adlandırılan $\rho(\vec{r})$ fonksiyonu sıfıra eşitse denklem Laplace Denklemine dönüşür. Bu denklemin Elektrostatik, Mekanik, Mühendislik ve Teorik Fizikte geniş bir kullanım alanı vardır.

3- Genellikle (1.2.21) ve (1.2.23) denklemlerini gerçekleyen skaler alanlar $\phi = \phi(x, y, z, t)$ biçiminde de olabilir. Bu durumda bu alanın bir noktadaki değeri, o nokta komşuluğunda yer alan başka bir noktadaki ortalama değerinden farklı değerler alır. Kararlı durumlarda bu fark, zaman sürecinde dengelenmeye neden olur. Bu durum,

$$(\bar{\phi} - \phi_0) \sim \frac{\partial \phi_0(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{1.2.24}$$

şeklinde ifade edilir. Ele alınan noktadaki laplasiyenin $(\bar{\phi} - \phi_0)$'la orantılı olduğu yani

$$\nabla^2 \phi_0 \sim (\bar{\phi} - \phi_0) \tag{1.2.25}$$

şeklinde ifade edildiği göz önüne alınırsa, (1.2.24) ve (1.2.25) ifadelerinden

$$\nabla^2 \phi_0 \sim \frac{\partial \phi_0(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{1.2.26}$$

veya, α bir orantı katsayısı olmak üzere

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} \tag{1.2.27}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem Difüzyon Denklemi olarak bilinir. Difüzyon Denklemi parabolik bir denklemdir. (1.2.27) Denklemindeki α katsayısına geçirgenlik katsayısı denir.

Bu denklemin uygulamalı bilimlerde geniş bir kullanım alanı vardır.

4- Skaler alanın zamana bağlı olduğu durumlarda $(\bar{\phi}-\phi_0)$ farkı, fonksiyonun ivmesiyle orantılı ise bu durum,

$$(\bar{\phi}-\phi_0) \sim \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{1.2.28}$$

biçiminde ifade edilir. Aynı zamanda $(\bar{\phi}-\phi_0)$ farkının $\nabla^2\phi_0$'la orantılı olmasından dolayı,

$$\nabla^2\phi_0 \sim \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{1.2.29}$$

dır. (1.2.29) İfadesi herhangi bir nokta için, c bir orantı sabiti olmak üzere

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{1.2.30}$$

biçiminde ifade edilirse, Dalga Denklemi olarak bilinen denklem elde edilir. Bu denklem hiperbolik bir denklemdir.

II. BÖLÜM

2.1 SKALER DALGA DENKLEMİNİN PROLATE KÜRESEL KOORDİNATLARDA AYRIŞTIRILMASI

$\phi(x,y,z)$ bir skaler fonksiyon olmak üzere bir eliptik Kısmi Diferansiyel Denklem olan

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\phi(x,y,z) = 0 \tag{2.1}$$

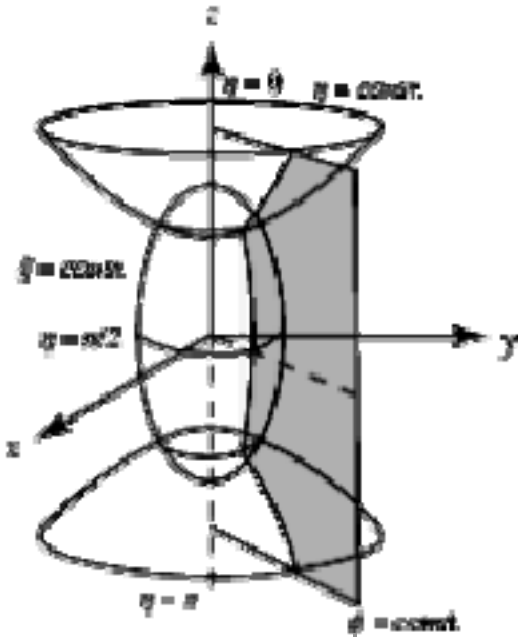
denklemi bir skaler Dalga Denklemidir. Bu denklem, aynı odaklı elipsler ve hiperbollerden oluşan iki boyutlu eliptik koordinat sisteminin z ekseni etrafında dönmesi ile oluşan prolate koordinat sisteminde ayrıştırılabilir (şekil 2.1, 2.2). (x,y,z) Kartezyen Koordinatlar, (η,ξ,φ) Prolate Koordinatlar olmak üzere, iki koordinat sistemi arasında d odaklar arası uzunluk ve

$-1 \le \eta \le 1, \quad 1 \le \xi < \infty, \; 0 \le \varphi \le 2\pi,$ olmak üzere

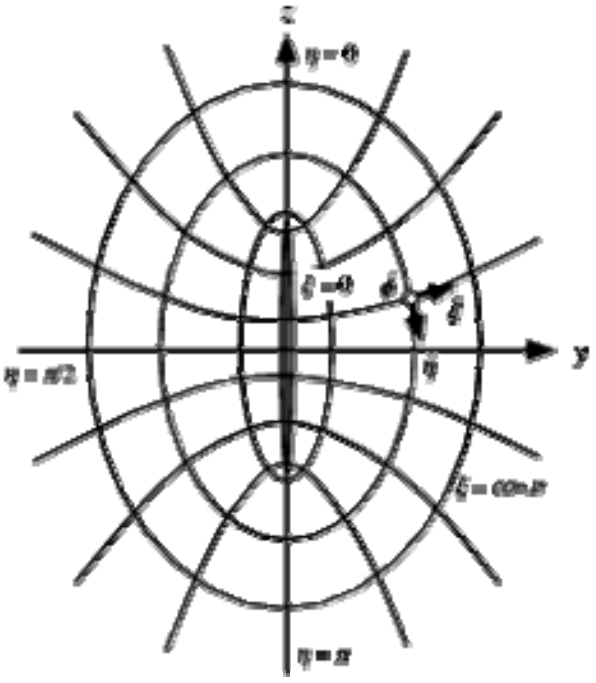
$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}[(1-\eta^2)(\xi^2-1)]^{1/2}\cos\varphi \\ y &= \frac{d}{2}[(1-\eta^2)(\xi^2-1)]^{1/2}\sin\varphi \\ z &= \frac{d}{2}\eta\xi \end{aligned} \tag{2.2}$$

dönüşümleri vardır [1]. Metrik katsayılar (2.2) ve

$$ds^2 = h_\eta^2 d\eta^2 + h_\xi^2 d\xi^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2 \tag{2.3}$$



şekil 2.1



şekil 2.2

bağıntılarından yararlanılarak

$$h_\eta = \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\right)^{1/2}$$

$$h_\xi = \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\right)^{1/2}$$

$$h_\varphi = \frac{d}{2}\left[\left(1-\eta^2\right)\left(\xi^2-1\right)\right]^{1/2} \tag{2.4}$$

elde edilir. Laplasyen ise

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\eta h_\xi h_\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi h_\varphi}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h_\eta h_\xi}{h_\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right\} \tag{2.5}$$

bağıntısından yararlanılarak

$$\nabla^2\phi = \frac{4}{d^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\left(\xi^2-\eta^2\right)}{\left(1-\eta^2\right)\left(\xi^2-1\right)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right]\right\} \tag{2.6}$$

olarak bulunur. $\nabla^2\phi$'nin bu değeri (2.1) denkleminde yerine yazılırsa $c = \frac{1}{2}kd$ olmak üzere

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\xi^2-\eta^2}{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+c^2\left(\xi^2-\eta^2\right)\right]\phi = 0 \tag{2.7}$$

denklemi elde edilir. $\phi = \phi_{mn}(\eta,\xi,\varphi)$ yi

$$\phi_{mn}(\eta,\xi,\varphi) = S_{mn}(c,\eta)R_{mn}(c,\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \tag{2.8}$$

şeklinde değişkenlerine ayırır ve Lamé çarpım formunda yazarsak (2.7) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial S_{mn}(c,\eta)R_{mn}(c,\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(\xi^2-1)\frac{\partial S_{mn}(c,\eta)R_{mn}(c,\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi}{\partial\xi}\right]+$$

$$\frac{\xi^2-\eta^2}{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{\partial^2 S_{mn}(c,\eta)R_{mn}(c,\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi}{\partial\varphi^2}+\left[c^2\xi^2-c^2\eta^2\right]S_{mn}(c,\eta)R_{mn}(c,\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi$$

$$=0 \quad (2.9)$$

şeklini alır [1]. Bu denklem ise gerekli kısaltmalar yapılarak

$$\left\{\frac{1}{S_{mn}(c,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial S_{mn}(c,\eta)}{\partial\eta}\right]\right\}+\left\{\frac{1}{R_{mn}(c,\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial R_{mn}(c,\xi)}{\partial\xi}\right]\right\}$$

$$-\frac{m^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}+c^2\xi^2-c^2\eta^2=0 \quad (2.10)$$

şeklinde yazılır. (2.10) Denklemi

$$\left\{\frac{1}{S_{mn}(c,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial S_{mn}(c,\eta)}{\partial\eta}\right]-\frac{m^2}{1-\eta^2}-c^2\eta^2\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{R_{mn}(c,\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial R_{mn}(c,\xi)}{\partial\xi}\right]-\frac{m^2}{\xi^2-1}+c^2\xi^2\right\}=0 \quad (2.11)$$

formunda yazılırsa

$$\frac{1}{S_{mn}(c,\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial S_{mn}(c,\eta)}{\partial\eta}\right]-\frac{m^2}{1-\eta^2}-c^2\eta^2=-\lambda_{mn} \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{R_{mn}(c,\xi)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial R_{mn}(c,\xi)}{\partial\xi}\right]-\frac{m^2}{\xi^2-1}+c^2\xi^2=\lambda_{mn} \quad (2.13)$$

denklemleri elde edilir. (2.12) ve (2.13) düzenlenirse

$$\frac{d}{d\eta}\left[\left(1-\eta^2\right)\frac{d}{d\eta}S_{mn}(c,\eta)\right]+\left[\lambda_{mn}-c^2\eta^2-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right]S_{mn}(c,\eta)=0 \qquad (2.14)$$

$$\frac{d}{d\xi}\left[\left(\xi^2-1\right)\frac{d}{d\xi}R_{mn}(c,\xi)\right]-\left[\lambda_{mn}-c^2\xi^2+\frac{m^2}{\xi^2-1}\right]R_{mn}(c,\xi)=0 \qquad (2.15)$$

formundaki denklemlere ulaşılır.

Diğer tarafta λ ve μ ayırma sabitleri olmak üzere açısal ve radyal değişkenlerden oluşan

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{du}{dz}\right]+\left[\lambda-c^2z^2-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]u=0 \qquad (2.16)$$

denklemini göz önüne alalım [1]. (2.16) Denkleminin her çözümü $c^2\neq 0$ olmak üzere küresel fonksiyonlarla ifade edilebilir. (2.16) Denklemi $z=\pm 1$ de düzgün, $z=\infty$ da düzgün olmayan olmak üzere üç tane tekil noktaya sahiptir. Bu denklemin çözümünde, çözümlerin özellikleri ile ilgili ileri çalışmalar yapılmış ve çözümler irdelenmiştir [1].

(2.16) Denklemindeki μ'nün değerinin bir tamsayı olması durumunda $z=\pm 1$ noktasındaki üsler farkı bir tamsayıdır ve sadece pozitif üslere ait çözümler geçerlidir. Bu çözümler birinci çeşit fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Diğer bağımsız çözümler $z=\pm 1$ de logaritmik tekilliklere sahiptirler ve ikinci çeşit fonksiyonlar olarak adlandırılırlar.

(2.14) Denklemi açısal fonksiyonların sağladığı bir denklemdir. (2.12) ve (2.13) de görüldüğü gibi $\lambda_{mn}(c)$ değerleri $\eta=\pm 1$' de denklemin özdeğerleridir. Bu özdeğerlere karşılık gelen $S_{mn}(c,\eta)$ öz fonksiyonuda n. derece ve m. mertebeden birinci çeşit prolate küresel açısal fonksiyonlardır**.**

(2.14) denkleminde $c = 0$ alınırsa denklem Birleşik Legendre Denklemine dönüşür ve bu yüzden

$$\lambda_{mn}(0) = n(n+1), \qquad n \geq m \tag{2.17}$$

dir. Eğer $c \neq 0$ ise denklem sonsuzda tekillik içerdiğinden Birleşik Legendre Denkleminden farklıdır. Bu durumda denklemin çözümleri

$$S_{mn}(c,\eta) = \sum_{r=0}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^{m}(\eta) \tag{2.18}$$

şeklindedir [1].

(2.14) Denklemi

$$(1-\eta^2)\frac{d^2 S_{mn}(c,\eta)}{d\eta^2} - 2\eta\frac{dS_{mn}(c,\eta)}{d\eta} + \left[\lambda_{mn} - c^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right] S_{mn}(c,\eta) = 0 \tag{2.19}$$

şeklinde yazılır ve (2.18) den

$$\frac{dS_{mn}(c,\eta)}{d\eta} = \sum_{r=0}^{\infty} d_r^{mn}(c)\frac{d}{d\eta} P_{m+r}^{m}(\eta) \tag{2.20}$$

ve

$$\frac{d^2 S_{mn}(c,\eta)}{d\eta^2} = \sum_{r=0}^{\infty} d_r^{mn}(c)\frac{d^2}{d\eta^2} P_{m+r}^{m}(\eta) \tag{2.21}$$

türevleri bulunur ve (2.18) ile birlikte (2.19) denkleminde yerine yazılır ve

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m} \quad , \qquad -1 \le z \le 1 \qquad (2.22)$$

bağıntısı kullanılırsa d_r^{mn} katsayıları için

$$\frac{(2m+r+2)(2m+r+1)c^2}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} d_{r+2}^{mn}(c) + [(m+r)(m+r+1) - \lambda_{mn}(c) + \frac{2(m+r)(m+r+1) - 2m^2 - 1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} c^2] d_r^{mn}(c) + \frac{r(r-1)c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)} d_{r-2}^{mn}(c) = 0, r \ge 0 \qquad (2.23)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu rekürans bağıntısı ikinci mertebeden lineer, homojen bir fark denklemi oluşturur. Bu fark denklemi ikinci mertebeden bir diferansiyel denkleme karşılık gelir ve iki tane trivial olmayan bağımsız çözüme sahiptir. (2.23) Denkleminde $d_r^{mn} \Big/ d_{r-2}^{mn}$ ifadesi $r \to \infty$ iken $-\frac{4r^2}{c^2}$ ve $-\frac{c^2}{(4r^2)}$ ye bağlı olarak ya artar yada sıfıra yaklaşır. $-\frac{c^2}{(4r^2)}$ için (2.18) ifadesi tüm sonlu η değerleri için mutlak yakınsaktır.

r'nın sonsuz olması durumunda $d_r^{mn} \Big/ d_{r-2}^{mn}$ nin limitinin sıfır olması λ_{mn} ve c^2 arasında bir transcendental denkleme ulaşmamızı sağlar. Çünkü ,

$$\gamma_r^m = (m+r)(m+r+1) + \frac{1}{2}c^2 \left[1 - \frac{4m^2-1}{(2m+2r-1)(2m+2r+3)} \right], \qquad r \ge 0 \qquad (2.24)$$

$$\beta_r^m = \frac{r(r-1)(2m+r)(2m+r-1)c^4}{(2m+2r-1)^2(2m+2r-3)(2m+2r+1)} \quad , \qquad r \ge 2 \qquad (2.25)$$

$$N_r^m = \frac{(2m+r)(2m+r-1)c^2}{(2m+2r-1)\ (2m+2r+1)} \frac{d_r^{mn}}{d_{r-2}^{mn}} \quad , \qquad r \ge 2 \qquad (2.26)$$

denirse (2.23) denklemi

$$N_{r+2}^{m} = \gamma_{r}^{m} - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{r}^{m}}{N_{r}^{m}} \quad , \qquad r \geq 2 \qquad (2.27)$$

ve

$$N_{2}^{m} = \gamma_{0}^{m} - \lambda_{mn} \quad , \qquad N_{3}^{m} = \gamma_{1}^{m} - \lambda_{mn} \qquad (2.28)$$

olmak üzere

$$N_{r}^{m} = \frac{\beta_{r}^{m}}{\gamma_{r}^{m} - \lambda_{mn} - N_{r+2}^{m}}, \qquad r \geq 2 \qquad (2.29)$$

denklemine dönüşür. Diğer taraftan $\lim_{r\to\infty} N_{r}^{m} = 0$ olması koşulundan (2.29) denkleminin iterasyonu ile

$$N_{r+2}^{m} = \frac{\beta_{r+2}^{m}}{\gamma_{r+2}^{m} - \lambda_{mn} -} \frac{\beta_{r+4}^{m}}{\gamma_{r+4}^{m} - \lambda_{mn} -} \frac{\beta_{r+6}^{m}}{\gamma_{r+6}^{m} - \lambda_{mn} -} \ldots\ldots \qquad (2.30)$$

yakınsak sonsuz sürekli kesri elde edilir [1]. Burada

$$a - \cfrac{1}{b - \cfrac{c}{d - \cfrac{e}{f \ldots}}}$$

sürekli kesir gösterimi yerine

$$a - \frac{1}{b -} \frac{c}{d -} \frac{e}{f -} \ldots$$

açık gösterimi kullanılmıştır.

Diğer yandan $r < 0$ için $d_r^{mn} = 0$ koşulu ile (2.30) a benzer şekilde (2.27) denkleminin iterasyonu ile

$$N_{r+2}^{m} = \gamma_r^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_r^m}{\gamma_{r-2}^m - \lambda_{mn}} \; \frac{\beta_{r-2}^m}{\gamma_{r-4}^m - \lambda_{mn}} \; \ldots\ldots \tag{2.31}$$

sonlu sürekli kesri bulunur. Burada kesrin paydasında kalan en son terimin $\gamma_0^m - \lambda_{mn}$ veya $\gamma_1^m - \lambda_{mn}$ olması r nin tek veya çift olmasına bağlıdır. Böylece λ_{mn} ve c^2 arasında sözü edilen denklem

$$U_1(\lambda_{mn}) = \gamma_{n-m}^m - \lambda_{mn} - \frac{\beta_{n-m}^m}{\gamma_{n-m-2}^m - \lambda_{mn}} \; \frac{\beta_{n-m-2}^m}{\gamma_{n-m-4}^m - \lambda_{mn}} \; \ldots\ldots \tag{2.32}$$

ve

$$U_2(\lambda_{mn}) = - \frac{\beta_{n-m+2}^m}{\gamma_{n-m+2}^m - \lambda_{mn}} \; \frac{\beta_{n-m+4}^m}{\gamma_{n-m+4}^m - \lambda_{mn}} \; \ldots\ldots \tag{2.33}$$

olmak üzere

$$U(\lambda_{mn}) = U_1(\lambda_{mn}) + U_2(\lambda_{mn}) \tag{2.34}$$

şeklindedir.

Bu yaklaşım c'nin küçük değerleri içindir. Bu nedenle küresel fonksiyonların gösterimleri c'nin küçük değerleri için kullanılır ve açılımlar c'nin 0,1,2,….,9 değerleri için geçerlidir.

c'nin büyük değerleri için ise asimptotik açılımlarda uygun bir gösterim elde edebilmek için $c \to \infty$ için küresel fonksiyonların davranışları incelenir. Prolate fonksiyonların asimptotik davranışları oblate fonksiyonların davranışlarından farklıdır.

(2.14) denkleminde önce

$$S_{mn}(c,\eta) = (1-\eta^2)^{1/2} U_{mn}(c,\eta) \tag{2.35}$$

yer değiştirmesi ve sonra

$$\eta = (2c)^{-1/2} x \tag{2.36}$$

dönüşümü yapılırsa denklem

$$(2c - x^2)\frac{d^2U_{mn}}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{dU_{mn}}{dx} + \left[\lambda_{mn} - m(m+1) - \frac{1}{2}c\,x^2\right]U_{mn} = 0 \tag{2.37}$$

şekline dönüşür. Eğer $2c >> x^2$ ise, $c \to \infty$ iken bu denklem

$$\frac{d^2Umn}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}\frac{\lambda_{mn}}{c} - \frac{1}{4}x^2\right)U_{mn} = 0 \tag{2.38}$$

şeklini alır. (2.38) Denklemi

$$\frac{d^2D_r}{dx^2} + \left(r + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)D_r = 0 \tag{2.39}$$

biçiminde D_r parabolik silindirik fonksiyonlar tarafından sağlanan denklemle aynı formdadır.

$r \geq 0$ için D_r fonksiyonları

$$D_r(x)=(-1)^r e^{\frac{1}{4}x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{\frac{-1}{2}x^2} \tag{2.40}$$

şeklinde yazılırsa $D_r(x)$'in

$$D_r(x) = 2^{-\frac{1}{2}r} e^{-\frac{1}{4}x^2} H_r\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.41}$$

biçiminde Hermite Polinomları ile ifade edilebileceği görülür. Ayrıca $U_{mn}(x)$ ile $D_{n-m}(x)$ fonksiyonları $c \to \infty$ için orantılı olacağından

$$\lambda_{mn}(c) \underset{c\to\infty}{\longrightarrow} (2n - 2m + 1)c \tag{2.42}$$

dir. Diğer taraftan $U_{mn}(x)$

$l = n - m$

olmak üzere

$$U_{mn}(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_r^l D_{\ell+r}(x) \tag{2.43}$$

şeklinde $D_r(x)$ fonksiyonunun terimleri ile yazılabilir.

(2.43) İfadesi (2.37) denkleminde yerine yazılır ve (2.39) denklemi kullanılırsa,

$r = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots\ldots$ için

$$-h_{r-4}^{\ell}+4mh_{r-2}^{\ell}+\left[4\lambda_{mn}(c)-8c\left(\ell+r+\frac{1}{2}\right)-4m^2+2(\ell+r)^2+2(\ell+r)+3\right]h_r^{\ell}$$

$$-4m(\ell+r+1)(\ell+r+2)h_{r+2}^{\ell}-(\ell+r+1)(\ell+r+2)(\ell+r+3)(\ell+r+4)h_{r+4}^{\ell}=0 \qquad (2.44)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. $\lambda_{mn}(c)$ ve h_r^{ℓ} (2.44) rekürans bağıntısından ardışık yaklaşımlar metodu ile elde edilebilir. Böylece ,

$$\frac{h^{\ell}\pm(2r+2)}{h_0^{\ell}}=O\left(c^{-\frac{1}{2}r-1}\right) \qquad (2.45)$$

$$\frac{h^{\ell}\pm(2r+4)}{h_0^{\ell}}=O\left(c^{-\frac{1}{2}r-1}\right) \qquad (2.46)$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda_{mn}(c)\cong{}&(2\ell+1)c-(2\ell^2+2\ell+4m^2)2^{-2}-(2\ell+1)(\ell^2+\ell+3-8m^2)2^{-4}c^{-1}\\&-[5(\ell^4+2\ell^3+7\ell+3)-48m^2(2\ell^2+2\ell+1)]2^{-6}c^{-2}\\&-[66\ell^5+165\ell^4+962\ell^3+1278\ell^2+1321\ell+453\\&-m^2(2368\,\ell^3+3552\,\ell^2+4448\,\ell+1632)+m^4(256\,\ell+128)]2^{-10}c^{-3}\\&-[252\ell^6+756\ell^5+5885\ell^4+10510\ell^3+18478\ell^2+13349\ell+4425\\&-m^2(14720\ell^4+29440\ell^3+64000\ell^2+49280\ell+17280)\\&+m^4(6144\ell^2+6144\ell+3072)]2^{-12}c^{-4}\\&-\{527(2\ell+1)^7+61529(2\ell+1)^5+1043961(2\ell+1)^3+2241599(2\ell+1)\\&+2^5m^2[5739(2\ell+1)^5+127550(2\ell+1)^3+298951(2\ell+1)]\\&-2^{11}m^4[355(2\ell+1)^3+1505(2\ell+1)]+2^{16}m^6(2\ell+1)\}2^{-20}c^{-5}.....\end{aligned} \qquad (2.47)$$

bulunur [1].

Diğer taraftan d_r^{mn} katsayıları (2.23) rekürans bağıntısının tekrarından elde edilebilir. $\eta=0$ için,

$$S_{mn}(c,0)=P_n^m(0)=\frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}}\,(n+m)!}{2^n\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}\quad,\qquad (n-m)\text{çift} \tag{2.48}$$

olmak üzere, normalizasyon

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{r}{2}}(r+2m)!}{2^r\left(\frac{r}{2}\right)!\left(\frac{r+2m}{2}\right)!}\,d_r^{mn}=\frac{(-1)^{\frac{n-m}{2}}(n+m)!}{2^{n-m}\left(\frac{n-m}{2}\right)!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}\quad,\quad (n-m)\,\text{çift} \tag{2.49}$$

şeklinde bulunur [1].

III. BÖLÜM

3.1 PROLATE KÜRESEL KOORDİNAT SİSTEMİNDE KÜTLE DİFÜZYON DENKLEMİ

Transient Difüzyon Denklemi'nin matematiksel çözümleri "Kurutma İşlemleri"nde çok önemlidir. Kurutma işlemi ile ilgili çözümlerin yapılmasında nem içerik dağılımının ve ortalama nem içeriklerinin bilinmesi gerekir.

Değişik çalışmalarda eliptik geometriye sahip tarımsal ürünlerin difüzyon katsayıları sabit farz edilerek prolate küresel koordinatlarda kütle difüzyon denkleminin analitik çözümleri elde edilmiştir [3]. Bu çözümler incelenen ürünün türüne göre kurutma süresince kurutma işleminin davranışını tahmin etmede kullanılır.

Difüzyon denkleminin analitik çözümü özel koşullarda belirli sınır koşulları ile elde edilebilir. Kesikli durumlar için kütle difüzyon denklemi özel sınır koşulları ile verilen silindir, küre ve plaka gibi tek geometrili cisimlerdeki yük transferi için çözülebilir [4]. Bu durumlarda, tarımsal ürünlerdeki nem içerik dağılımının bilinmesi gerekir. Doğadaki pek çok tarımsal ürün prolate küresel formdadır. Bu yüzden bu form doğal form olarak kabul edilir.

Göz önüne aldığımız örnekte iki boyutlu eliptik koordinat sistemi kullanılarak yüzeyinde sıcaklığın sabit olduğu prolate küresel cisimlerdeki kütle transfer denkleminin analitik çözümü yapılarak, nem transferini tanımlayan analitik çözümler verilmiştir [5].

Kütle Difüzyon Denklemi; D kütle difüzyon katsayısı ve $M(x,y,z)$'de t zamanında ürünün nem içeriği olmak üzere,

$$\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial M}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial M}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial M}{\partial z}\right) \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. (x,y,z) Kartezyen Koordinatlar, (μ,ϕ,ω) Prolate Koordinatlar

olmak üzere, iki koordinat sistemi arasında $L = \left(L_2^2 - L_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$ odak uzunluğu ve $0 \le \mu < \infty$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \omega \le 2\pi$ olmak üzere,

$$x = L.\sinh\mu.\sin\phi.\cos\omega$$
$$y = L.\sinh\mu.\sin\phi.\sin\omega$$
$$z = L.\cosh\mu.\cos\phi \qquad (3.2)$$

bağıntıları vardır [6].

(3.2) bağıntılarında $\xi = \cosh\mu$, $\eta = \cos\phi$, $\zeta = \cos\omega$ dönüşümleri yapılırsa $\xi \in [1,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$, $\zeta \in [0,2\pi]$ olmak üzere,

$$x = L.\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)}$$

$$y = L.\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)\left(1 - \zeta^2\right)}$$

$$z = L.\xi.\eta \qquad (3.3)$$

bulunur [7].

$$\vec{r} = L\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)}\vec{i} + L\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)\left(1 - \eta^2\right)\left(1 - \zeta^2\right)}\vec{j} + L.\xi.\eta.\vec{k} \qquad (3.4)$$

kullanılarak Prolate Koordinat Sistemi için

$$h_\xi = L.\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \qquad (3.5)$$

$$h_\eta = L\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \qquad (3.6)$$

$$h\zeta = L\sqrt{\frac{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}{\left(1-\zeta^2\right)}} \tag{3.7}$$

metrik katsayıları elde edilir. Eğrisel koordinatlarda Laplace operatörünün

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi h_\zeta}{h_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right\} \tag{3.8}$$

şeklindeki genel ifadesinde (3.5), (3.6) ve (3.7) büyüklükleri yerlerine yazılırsa (3.1) denklemi

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)D\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\right]+\left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)D\frac{\partial M}{\partial\eta}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{L^2\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)D\frac{\partial M}{\partial\zeta}\right)\right] \tag{3.9}$$

şeklini alır. Bu denklem z ekseni etrafındaki simetriden dolayı

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)D\frac{\partial M}{\partial\xi}\right)\right]+\left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)D\frac{\partial M}{\partial\eta}\right)\right] \tag{3.10}$$

biçimini alır. Başlangıçta cismin içerisindeki nem içerik dağılımının düzenli ve yüzeyde daima sabit olduğu varsayılarak, (3.10) denklemi için sınır koşulları,

$$M\left(\xi,\eta,0\right) = M_0 = sabit\ , \qquad M\left(\xi,\eta,t\right) = M_e = sabit\left(yüzeyde\right) \tag{3.11}$$

şeklinde alınarak (3.10) denklemi çözülür. Bunun için $M\left(\xi,\eta,t\right)$ fonksiyonu

$$M\left(\xi,\eta,t\right) = \psi\left(\xi,\eta\right)\theta\left(t\right) \tag{3.12}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{L^2}{\theta.D}=\frac{1}{\psi}\frac{1}{\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right] \tag{3.13}$$

bulunur. (3.13)'ün ikinci yanı $-c^2$'ye eşitlenirse,

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{-c^2D\theta}{L^2} \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. Buradan $\theta(t)$ için çözüm,

$$\theta(t)=e^{\frac{-c^2Dt}{L^2}} \tag{3.15}$$

şeklinde bulunur. Böylece (3.12)'den

$$M=\psi(\xi,\eta)\exp\left(-c^2Dt/L^2\right) \tag{3.16}$$

ifadesine ulaşılır. D'yi sabit alarak (3.16) ifadesi (3.10) denkleminde yazılırsa,

$$\left(-\frac{c^2}{L^2}\right)\psi=\left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\right]+\left[\frac{1}{L^2\left(\xi^2-\eta^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right] \tag{3.17}$$

veya

$$\nabla^2\psi+\left(\frac{c^2}{L^2}\right)\psi=0 \tag{3.18}$$

denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (3.17)'deki $\psi(\xi,\eta)$ fonksiyonu için

$$\psi(\xi,\eta)=\chi(\xi)\lambda(\eta) \tag{3.19}$$

ayrıştırması yapılarak (3.17) denklemi

$$\frac{1}{\chi}\left[2\xi\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}+c^2\xi^2\chi\right]+\frac{1}{\lambda}\left[-2\eta\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}+\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta^2}-c^2\eta^2\lambda\right]=0 \tag{3.20}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemden de

$$\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}+\left(b-c^2\eta^2\right)\lambda=0 \tag{3.21}$$

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+\left(b-c^2\xi^2\right)\chi=0 \tag{3.22}$$

biçiminde iki adi diferansiyel denklem elde edilir.

(3.21) ve (3.22) denklemlerinin Bölüm II'de (2.14) ve (2.15) denklemlerinde $m=0$ için elde edilen denklemler ile aynı formda olduğu görülür. Ayrıca (3.21) ve (3.22) denklemleri de b özdeğer olmak üzere aynı formda denklemlerdir. Bu denklemlerde λ, η'nın $[0,1]$ aralığında, χ, ξ'nın $\left[1,\frac{L_2}{L}\right]$ aralığında tanımlı fonksiyonlarıdır.

$\lambda(\eta)$ fonksiyonu 1. çeşit Legendre fonksiyonu şeklinde ifade edilirken, $\chi(\xi)$ fonksiyonu 1. çeşit Küresel Bessel fonksiyonu şeklinde ifade edilir.

(3.21) ve (3.22) denklemlerinin çözümleri, $m,n=0,2,4\ldots$ olmak üzere,

$$\chi_m(c,\xi)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}d_{n,m}\right]^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n-m}{2}}\,d_{n,m}\,J_n(c\xi) \tag{3.23}$$

$$\lambda_m(c,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{n,m}(c)\,P_n(\eta) \tag{3.24}$$

biçimindedir. Bu çözümlerdeki $d_{n,m}$ katsayılarını belirlemek için (3.23) ve (3.24) ün birinci ve ikinci türevleri alınır ve (3.21), (3.22) denklemlerinde yerine yazılırsa, $d_{n,m}$ katsayıları için, $r = 0,2,4,\ldots$ ve

$$\alpha_r = \frac{(r+2)(r+1)c^2}{(2r+5)(2r+3)} \quad , \tag{3.25}$$

$$\beta_r = \frac{[(2r)(r+1)-1]c^2}{(2r-1)(2r+3)} + r(r+1) \quad , \tag{3.26}$$

$$\gamma_r = \frac{r(r-1)c^2}{(2r-3)(2r-1)} \tag{3.27}$$

olmak üzere,

$$\alpha_r d_{r+2,m} + (\beta_r - b_n) d_{r,m} + \gamma_r d_{r-2,m} = 0 \tag{3.28}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. b_n özdeğerleri için de,

$$U_1(b_n) = \varphi_n - b_n - \frac{\delta_n}{\varphi_{n-2} - b_n} - \frac{\delta_{n-2}}{\varphi_{n-4} - b_n} - \cdots \tag{3.29}$$

$$U_2(b_n) = -\frac{\delta_{n+2}}{\varphi_{n+2} - b_n} - \frac{\delta_{n+4}}{\varphi_{n+4} - b_n} - \cdots \tag{3.30}$$

ve

$$\delta_n = \frac{n^2(n-1)^2 c^4}{(2n-1)^2(2n+1)(2n-3)} \quad ; \qquad n \geq 2 \tag{3.31}$$

$$\varphi_n = n(n+1) + \frac{c^2}{2}\left[1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right] \quad ; \qquad n \geq 0 \tag{3.32}$$

olmak üzere,

$$U(b_n) = U_1(b_n) + U_2(b_n) = 0 \tag{3.33}$$

transcendental denklemi bulunur [5].

Bölüm II'de bahsedildiği gibi sürekli kesirler tekniği ile bulunan (3.33) ifadesi c'nin küçük değerleri için geçerlidir. Eğer $c \geq 10.0$ ise özdeğerler asimptotik açılım ile elde edilir. Bölüm II'de (2.47) ifadesinde $m = 0$ için bu özdeğeri

$$b_n = (2n+1)c - \frac{(2n^2+n+3)}{2^2} - \frac{(2n+1)(n^2+n+3)}{2^4 c} - \frac{5(n^4+2n^3+7n+3)}{2^6 c^2}$$

$$- \frac{(66n^5+165n^4+962n^3+1278n^2+1321n+453)}{2^{10} c^3}$$

$$- \frac{(252n^6+756n^5+5885n^4+10510n^3+18478n^2+13349n+4425)}{2^{12} c^4}$$

$$- \frac{\left[527(2n+1)^7 + +61529(2n+1)^5 + 1043961(2n+1)^3 + 2241599(2n+1)\right]}{2^{20} c^5} + 0\,(c^{-6}) \tag{3.34}$$

olarak bulunur.

$d_{n,m}$ için Bölüm II'de verilen (2.49) bağıntısı $m = 0$ ve $r = 0,2,\ldots$, $n = 0,2,\ldots$ olmak üzere

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}(r)!}{2^r \left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!} d_{n,m} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n)!}{2^n \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!} \tag{3.35}$$

şeklini alır.

(3.35) denklemi (3.28) ve (3.34) ile birlikte $d_{n,m}$ katsayılarının tam olarak belirlenmesine yardımcı olur.

Böylece problemin genel çözümü,

$$M(\xi,\eta,t)-M_e=\sum_{m=0.2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\,e^{-c_{mk}^2\frac{Dt}{L^2}}\chi_m(c_{mk},\xi)\lambda_m(c_{mk},\eta) \tag{3.36}$$

şeklinde ifade edilir.

Buradaki A_{mk} katsayılarını belirlemek için (3.11) deki sınır koşulları (3.36) denklemine uygulanırsa,

$$M_0-M_e=\sum_{m=0.2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{mk}\,\chi_m(c_{mk},\xi)\lambda_m(c_{mk},\eta) \tag{3.37}$$

ifadesi elde edilir ve (3.37) nin her iki yanı $\chi_p(c_{pk},\xi)\lambda_p(c_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)$ ile çarpılıp, elipsoidin dörtte birinde integre edilirse,

$$\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}}\chi_p(c_{pk},\xi)\lambda_p(c_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)(M_0-M_e)d\xi d\eta$$

$$=\sum_{m=0.2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}}\chi_p(c_{pk},\xi)\lambda_p(c_{pk},\eta)(\xi^2-\eta^2)A_{mk}\chi_m(c_{mk},\xi)\lambda_m(c_{mk}\eta)d\xi d\eta \tag{3.38}$$

ifadesine ulaşılır.Burada χ ve λ fonksiyonlarının diklik koşulundan $m=p$ için

$$A_{mk}=\frac{\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}}\chi_m(c_{mk},\xi)\lambda_m(c_{mk},\eta)(\xi^2-\eta^2)(M_0-M_e)d\xi d\eta}{\int_0^1\int_1^{\frac{L_2}{L}}\left[\chi_m(c_{mk,}\xi)\lambda_m(c_{mk},\eta)\right]^2(\xi^2-\eta^2)d\xi d\eta} \tag{3.39}$$

bulunur.

IV. BÖLÜM

4.1 BESSEL FONKSİYONLARI

4.1.1 Bessel Diferansiyel Denklemi Ve Bessel Fonksiyonları

$\phi = \phi(r,\theta,z)$ olmak üzere $\nabla^2\phi = 0$ şeklindeki Laplace denklemi Silindirik Koordinatlarda,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (4.1.1.1)$$

biçiminde yazılır ve

$$\phi(r,\theta,z) = R(r)Q(\theta)Z(z) \qquad (4.1.1.2)$$

değişken ayrışımı yapılırsa,

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - Z.k^2 = 0 \qquad (4.1.1.3)$$

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} + n^2Q = 0 \qquad (4.1.1.4)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \qquad (4.1.1.5)$$

şeklinde üç bağımsız denklem elde edilir. (4.1.1.3), (4.1.1.4), (4.1.1.5) denklemlerindeki k^2 ve n^2 büyüklükleri değişkenlere ayrışım parametreleridir. (4.1.1.3) ve (4.1.1.4) denklemlerinin çözümleri sırasıyla;

$$Z = e^{\pm kz} \tag{4.1.1.6}$$

$$Q = e^{\pm in\theta} \tag{4.1.1.7}$$

olarak hesaplanır. (4.1.1.5) Denkleminde $x = k.r$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + \left(x^2 - n^2\right)R = 0 \tag{4.1.1.8}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (4.1.1.8) Denklemine Bessel Denklemi ve bu denklemin çözümlerine de Bessel Fonksiyonları denir.

(4.1.1.8) denkleminin,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\alpha+j} \tag{4.1.1.9}$$

şeklinde bir çözümünü bulalım. Bu durumda (4.1.1.8) denkleminden, $a_0 \neq 0$ için,

$$\left(\alpha^2 - n^2\right) = 0 \tag{4.1.1.10}$$

indis denklemi,

$$\left[(\alpha + j)^2 - n^2\right]a_j + a_{j-2} = 0, \tag{4.1.1.11}$$

katsayılar bağıntısı elde edilir. İndis denkleminin kökleri $\alpha = \pm n$ olarak hesaplanır ve (4.1.1.11)'de $\alpha = n$ değeri yerine yazılırsa, $j \geq 2$ olmak üzere,

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{j(2n + j)} \tag{4.1.1.12}$$

ifadesi bulunur. (4.1.1.12) İfadesinde; $a_1 = 0$ olduğundan, tek kuvvetler sıfır olur ve çift kuvvetler için ise,

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{a_0 \Gamma(n+1)}{2^{2j}\, j! \Gamma(n+j+1)} \tag{4.1.1.13}$$

değeri elde edilir. Bu durumda, $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ seçilirse,

$$R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j! \Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \tag{4.1.1.14}$$

ya da,

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j! \Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j} \tag{4.1.1.15}$$

Birinci çeşit Bessel Fonksiyonuna ulaşılır. Ayrıca $\alpha = -n$ için,

$$J_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j! \Gamma(j-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j-n} \tag{4.1.1.16}$$

bulunur. Eğer n tamsayı ise (4.1.1.15) ve (4.1.1.16) çözümleri lineer bağımlıdır. Bu durumda

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{4.1.1.17}$$

dır. Denklemin çözümü için ikinci bir lineer bağımsız çözüm bulunması gerekir. Bu durum için Neumann Fonksiyonu veya 2. çeşit Bessel fonksiyonu olarak adlandırılan

$$N_n(x) = \frac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \tag{4.1.1.18}$$

fonksiyonu alınır. Böylece genel çözüm,

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x) \tag{4.1.1.19}$$

olur. Diğer taraftan

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) = \frac{J_{-n}(x) - e^{in\pi} J_n(x)}{i\sin n\pi} \tag{4.1.1.20}$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x) = \frac{e^{in\pi} J_n(x) - J_{-n}(x)}{i\sin n\pi} \tag{4.1.1.21}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara da üçüncü türden Bessel Fonksiyonları yada Henkel Fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar arasında,

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right] \tag{4.1.1.22}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)\right] \tag{4.1.1.23}$$

bağıntıları vardır. Henkel Fonksiyonları da Bessel denkleminin bağımsız çözümleridir.

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} - \left(x^2 + n^2\right)R = 0 \tag{4.1.1.24}$$

diferansiyel denklemine değiştirilmiş veya Modified Bessel Denklemi denir. n bir tamsayı olmamak üzere (4.1.1.24) denkleminin lineer bağımsız çözümleri $J_n(ix)$ ve $J_{-n}(ix)$ şeklinde bulunur. Bu çözümler genellikle $I_n(x)$ ve $I_{-n}(x)$ ile gösterilir ve Modified Bessel Fonksiyonları olarak adlandırılır.

Ancak n tamsayı ise bu çözümler lineer bağımlıdır. Yani,

$$I_{-n}(x) = I_n(x) \tag{4.1.1.25}$$

dir. Bu durumda denklemin çözümü için ikinci bir lineer bağımsız çözüm bulunması gerekir. Bunun için,

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi} \tag{4.1.1.26}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon göz önüne alınır. Bu fonksiyona üçüncü türden Modified Bessel Fonksiyonu denir.

Diğer taraftan

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + (1-2\alpha)x\frac{dR}{dx} + \left\{\beta^2\gamma^2x^2 + \left(\alpha^2 - n^2\gamma^2\right)\right\}R = 0 \tag{4.1.1.27}$$

denkleminin genel çözümü

$$R = Ax^{\alpha}J_n\left(\beta x^{\gamma}\right) + Bx^{\alpha}Y_n\left(\beta x^{\gamma}\right) \tag{4.1.1.28}$$

biçimindedir. Burada;

$$\begin{aligned} &1 - 2\alpha = 2 \\ &\gamma = 1 \\ &\beta^2\gamma^2 = k^2 \\ &\alpha^2 - n^2\gamma^2 = -n(n+1) \end{aligned} \tag{4.1.1.29}$$

dönüşümleri yapılırsa (4.1.1.27) denklemi,

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2} + 2x\frac{dR}{dx} + \left\{k^2x^2 - n(n+1)\right\}R = 0 \tag{4.1.1.30}$$

biçimine dönüşür. (4.1.1.28)'e göre bu denklemin genel çözümü,

$$R = A_1 j_1(kx) + A_2 y_1(kx) \tag{4.1.1.31}$$

biçimindedir. (4.1.1.31) genel çözümünde verilen

$$j_1(x) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2x}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(x)} \tag{4.1.1.32}$$

$$y_1(x) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2x}\right) N_{n+\frac{1}{2}}(x)} \tag{4.1.1.33}$$

ifadelerine de Küresel Bessel Fonksiyonları denir.

$J_n(x)$ ve $I_n(x)$ çözümleri;

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_0F_1\left(n+1; -\frac{x^2}{4}\right) \tag{4.1.1.34}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-ix} {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2}; 2n+1; 2ix\right) \tag{4.1.1.35}$$

$$I_n(x) = e^{-\frac{in\pi}{2}} J_n\left(xe^{-\frac{i\pi}{2}}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2r+n}}{r!\Gamma(r+n+1)} \tag{4.1.1.36}$$

$$I_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n {}_0F_1\left(n+1; \frac{x^2}{4}\right) \tag{4.1.1.37}$$

$$I_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-x} {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2};, 2n+1,\ 2x\right) \tag{4.1.1.38}$$

şeklinde Hipergeometrik fonksiyonlar yardımı ile de ifade edilirler.

4.1.2 Bessel Fonksiyonları İçin Rekürans Bağıntıları, Türev Formülleri Ve Bazı Gösterimler

Bessel Fonksiyonları için çok kullanılan rekürans bağıntıları, türev formülleri ve asimptotik ifadeler aşağıda verilmiştir.

$$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=2\frac{n}{x}I_n(x) \tag{4.1.2.1}$$

$$I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x)=2I_n'(x) \tag{4.1.2.2}$$

$$K_{n-1}(x)-K_{n+1}(x)=-2\frac{n}{x}K_n(x) \tag{4.1.2.3}$$

$$K_n(x)=\frac{1}{2}i\pi e^{\frac{i\pi n}{2}}H_n^{(1)}\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)=-\frac{1}{2}i\pi e^{-\frac{i\pi n}{2}}H_n^{(2)}\left(xe^{-\frac{i\pi}{2}}\right) \tag{4.1.2.4}$$

$$Y_n\left(xe^{\frac{i\pi}{2}}\right)=ie^{\frac{i\pi n}{2}}I_n(x)-\frac{2}{\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}K_n(x) \tag{4.1.2.5}$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\left[x^nI_n(x)\right]=x^{n-m}I_{n-m}(x) \tag{4.1.2.6}$$

$$J_n(x)J_{-n+1}(x)+J_{-n}(x)J_{n-1}(x)=2(\pi x)^{-1}\sin\pi n \tag{4.1.2.7}$$

$$K_{n+1}(x)I_n(x)+K_n(x)I_{n+1}(x)=\frac{1}{x} \tag{4.1.2.8}$$

$$J_n\left(xe^{im\pi}\right)=e^{im\pi n}J_n(x) \qquad m=\pm1,\pm2,\ldots \tag{4.1.2.9}$$

$$Y_n\left(xe^{im\pi}\right)=e^{-m\pi in}Y_n(x)+2i\sin(m\pi n)\cot(\pi n)J_n(x) \quad m=\pm1,\pm2,\ldots \tag{4.1.2.10}$$

$$\frac{\partial J_n(x)}{\partial n}=J_n(x)\log\left(\frac{1}{2}x\right)-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2m}\frac{\Psi(n+m+1)}{m!\Gamma(n+m+1)} \tag{4.1.2.11}$$

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{\alpha^2}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^nJ_n(\alpha x) \tag{4.1.2.12}$$

$$J_{2n}(x)=(-1)^nn\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(n+\ell-1)!}{(n-\ell)!}(-1)^{\ell}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell}}{\ell!}J_{\ell}(x) \tag{4.1.2.13}$$

$$Y_{2n}(x)=(-1)^nn\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(n+\ell-1)!}{(n-\ell)!}(-1)^{\ell}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell}}{\ell!}Y_{\ell}(x) \tag{4.1.2.14}$$

$$I_{2n}(x)=n\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(n+\ell-1)!}{(n-\ell)!}(-1)^{\ell}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell}}{\ell!}I_{\ell}(x) \tag{4.1.2.15}$$

$$K_{2n}(x)=n\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(n+\ell-1)!}{(n-\ell)!}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell}}{\ell!}K_{\ell}(x) \tag{4.1.2.16}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n}\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}x^{n+1}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{n}\frac{\sin x}{x} \tag{4.1.2.17}$$

$$I_{n+\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}x^{n+1}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{n}\frac{\sinh x}{x} \tag{4.1.2.18}$$

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}x^{n+1}\left(\frac{d}{xdx}\right)^{n}\frac{e^{-x}}{x} \tag{4.1.2.19}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=Y_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}\sin x \tag{4.1.2.20}$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(x)=-J_{-\frac{1}{2}}(x)=-\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}\cos x \tag{4.1.2.21}$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x)=-iH^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(x)=-i\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}e^{ix} \tag{4.1.2.22}$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x)=iH^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(x)=i\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-ix} \tag{4.1.2.23}$$

$$I_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{1}{2}\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}\sinh x \tag{4.1.2.24}$$

$$K_{\frac{1}{2}}(x)=K_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{\frac{1}{2}\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-x} \tag{4.1.2.25}$$

$$J_{n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos t}e^{in\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}dt=\frac{i^{-n}}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{ix\cos t}\cos(nt)dt \tag{4.1.2.26}$$

$$J_{2n}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin t)\cos(2nt)dt \tag{4.1.2.27}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)J_n(x)=2\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\sin^{2n}t\,dt \tag{4.1.2.28}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)J_n(x)=2\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_0^{1}\left(1-t^2\right)^{n-1/2}\cos(xt)dt \qquad \mathrm{Re}\,n>-1/2 \tag{4.1.2.29}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)I_n(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_{-1}^{1}e^{-xt}\left(1-t^2\right)^{n-1/2}dt \tag{4.1.2.30}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)K_n(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_0^{\infty}e^{-x\cosh t}(\sinh t)^{2n}dt \quad \mathrm{Re}\,x>0\ ,\ \mathrm{Re}\,n>-1/2 \tag{4.1.2.31}$$

$$\int_0^{\infty}J_{\mu}(bt)\left(t^2+x^2\right)^{-n}t^{\mu+1}dt=\left(\frac{1}{2}b\right)^{n-1}x^{1+\mu-n}\left[\Gamma(n)\right]^{-1}K_{n-\mu-1}(bx) \tag{4.1.2.32}$$

$$\mathrm{Re}\left(2n-\frac{1}{2}\right)>\mathrm{Re}\ \mu>-1,\ \ \mathrm{Re}\ x>0$$

$$K_n\left(xe^{im\pi}\right)-e^{-imn\pi}K_n(x)=-i\pi\frac{\sin mn\pi}{\sin n\pi}I_n(x) \tag{4.1.2.33}$$

$x\to\infty$ için;

$$J_n(x)\cong\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \tag{4.1.2.34}$$

$$Y_n(x)\cong\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin\left[x-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \tag{4.1.2.35}$$

$$I_n(x)\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x} \tag{4.1.2.36}$$

$$K_n(x)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \tag{4.1.2.37}$$

$x \to 0$ için

$$J_n(x) \cong \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \tag{4.1.2.38}$$

$$I_n(x) \cong \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \tag{4.1.2.39}$$

$$K_n(x) \cong \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.1.2.40}$$

4.2 LEGENDRE FONKSİYONLARI

4.2.1 Legendre Diferansiyel Denklemi Ve Legendre Fonksiyonları

$\phi = \phi(r,\theta,\varphi)$ olmak üzere $\nabla^2\phi = 0$ şeklindeki Laplace denklemi küresel koordinatlarda,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{4.2.1.1}$$

biçiminde yazılır ve

$$\phi(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)Q(\varphi) \tag{4.2.1.2}$$

değişken ayrışımı yapılırsa,

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{4.2.1.3}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-n(n+1)R(r)=0 \tag{4.2.1.4}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right]-\left(\frac{m^2}{\sin\theta}\right)P(\theta)+\left[n(n+1)\sin\theta\right]P(\theta)=0 \tag{4.2.1.5}$$

şeklinde üç bağımsız denklem elde edilir. (4.2.1.3), (4.2.1.4) ve (4.2.1.5) Denklemlerindeki m^2 ve $n(n+1)$ büyüklükleri değişkenlere ayrışım parametreleridir. (4.2.1.3) ve (4.2.1.4) Denklemlerinin çözümleri sırasıyla,

$$Q(\varphi)=c_1e^{im\varphi}+c_2e^{-im\varphi} \tag{4.2.1.6}$$

ve

$$R(r)=A.r^{n+1}+B.r^{-n} \tag{4.2.1.7}$$

olarak hesaplanır. (4.2.1.5) Denkleminin çözümü için;

$$x=\cos\theta \tag{4.2.1.8}$$

dönüşümü yapılırsa denklem,

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP(x)}{dx}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x)=0 \tag{4.2.1.9}$$

biçimini alır. Bu denklemde $m^2=0$ alınırsa,

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\frac{dP(x)}{dx}\right)+n(n+1)P(x)=0 \tag{4.2.1.10}$$

Legendre denklemine ulaşılır.

(4.2.1.9) denkleminin çözümü için x'in tanım aralığı $[-1,1]$'dir. Bu denklemin çözümleri $P_n^m(x)$ ile gösterilir.

Diğer taraftan

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}V(x) \tag{4.2.1.11}$$

dönüşümü yapılır ve

$$\frac{dP_n^m(x)}{dx}=(1-x^2)^{m/2}V'(x)-mx(1-x^2)^{m/2-1}V(x) \tag{4.2.1.12}$$

$$\frac{d^2P_n^m(x)}{dx^2}=(1-x^2)^{m/2}V''(x)-2mx(1-x^2)^{m/2-1}V'(x)-m(1-x^2)^{m/2-1}V(x)$$
$$+m(m-2)x(1-x^2)^{m/2-2}V(x) \tag{4.2.1.13}$$

türevleri (4.2.1.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$(1-x^2)V''(x)-2x(m+1)V'(x)+[n(n+1)-m(m+1)]V(x)=0 \tag{4.2.1.14}$$

denklemi elde edilir. Öte yandan (4.2.1.10) Legendre Denkleminin m kere türevi alınırsa,

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}P_n(x)}{dx^{m+2}}-2x(m+1)\frac{d^{m+1}P_n(x)}{dx^{m+1}}+[n(n+1)-m(m+1)]\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}=0 \tag{4.2.1.15}$$

denklemine ulaşılır. (4.2.1.11) İfadesi göz önüne alınarak, (4.2.1.14) ve (4.2.1.15) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \tag{4.2.1.16}$$

olduğu görülür.

Burada $P_n(x)$ fonksiyonlarına Legendre Fonksiyonları, $P_n^m(x)$ fonksiyonlarına da Birleşik Legendre Fonksiyonları adı verilir.

(4.2.1.10) Denkleminin polinomsal bir çözümünü elde etmek için, denklemin

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\alpha+j} \tag{4.2.1.17}$$

şeklindeki kuvvet serisi çözümü bulunur. Bunun için (4.2.1.17) ifadesinin birinci ve ikinci türevleri alınıp, (4.2.1.10) denkleminde yerine yazılırsa $a_0 \neq o$ için

$$\alpha(\alpha-1)=0 \tag{4.2.1.18}$$

indis denklemi,

$$(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)a_{j+2}-[(\alpha+j)(\alpha+j+1)-n(n+1)]a_j=0 \tag{4.2.1.19}$$

katsayılar bağıntısı elde edilir. İndis denkleminin kökleri $\alpha=0$ veya $\alpha=1$ olarak hesaplanır. (4.2.1.19)'da $\alpha=0$ değeri yerine yazılısa, $j\geq 0$ olmak üzere,

$$a_{j+2}=\frac{(j-n)(j+n+1)}{(j+1)(j+2)}a_j \tag{4.2.1.20}$$

ifadesi bulunur. (4.2.1.20) İfadesinden tek ve çift sayılar için ayrı çözümler bulunarak, genel çözüm,

$$y = a_0\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{n(n-2)\ldots(n-2j+2)(n+1)(n+3)\ldots(n+2j-1)}{(2j)!}x^{2j}\right\}$$

$$+\,a_1\left\{x+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2j+1)(n+2)(n+4)\ldots(n+2j)}{(2j+1)!}x^{2j+1}\right\} \qquad (4.2.1.21)$$

olarak yazılabilir. (4.2.1.21) İfadesinden

$$P_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\,\frac{(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} \qquad (4.2.1.22)$$

Legendre denkleminin çözümü olan Legendre Polinomuna ulaşılır. Bunlar

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2+1\right)$$
$$P_3(x)=\frac{1}{5}\left(5x^3-3x\right)$$
$$\vdots \qquad (4.2.1.23)$$

şeklindedir.

$$\frac{d^n}{dx^n}x^p = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$$
$$=\frac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} \qquad (4.2.1.24)$$

ifadesinden dolayı,

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r}=\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r} \tag{4.2.1.25}$$

yazılabilir. (4.2.1.22) Legendre Polinomu,

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}\\&=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}x^{2n-2r}\\&=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n\end{aligned} \tag{4.2.1.26}$$

şekline de indirgenebilir. Bu ifade Rodrigues formülü olarak adlandırılır.

$P_n(x)$ ve $P_m(x)$ Legendre denkleminin birer çözümü olmalıdır. Bu durumda,

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dx^m}\left(x^2-1\right)^m \tag{4.2.1.27}$$

ifadeleri çarpılır, $[-1,1]$ aralığında integrali alınırsa,

$$I_{mn}=\frac{1}{2^{m+n}}\frac{1}{m!n!}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n}\left(x^2-1\right)^m\right]\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(x^2-1\right)^n\right]dx \tag{4.2.1.28}$$

elde edilir. (4.2.1.28) İfadesine n kere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I_{mn}=\frac{(-1)^n}{2^{m+n}}\frac{1}{m!n!}\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+n}\left(x^2-1\right)^m\right]\left(x^2-1\right)^n dx \tag{4.2.1.29}$$

bulunur. Eğer $m < n$ ise,

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m = 0 \tag{4.2.1.30}$$

olacağından $I_{mn} = 0$ olur. Bu bağıntı $m \neq n$ için geçerlidir. Eğer $m = n$ ise yine kısmi integrasyon ile

$$I_{mn} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx \tag{4.2.1.31}$$

elde edilir. İntegralde $x = \cos\theta$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\frac{2}{2n+1} \\ &= \frac{2}{2n+1} \end{aligned} \tag{4.2.1.32}$$

ifadesine ulaşılır. Bu durumda,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} \tag{4.2.1.33}$$

diklik bağıntısı elde edilir.

Birleşik Legendre Polinomları için diklik bağıntısı,

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)}{(l-m)} \tag{4.2.1.34}$$

dir. Buna göre $[-1,+1]$ aralığında bir $f(x)$ fonksiyonunu;

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_n^m(x) \tag{4.2.1.35}$$

şeklinde serilere açmak mümkündür. a_n, b_n katsayıları

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}P_n(x)f(x)dx \\ b_n &= \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-1}^{1}P_n^m(x)f(x)dx \end{aligned} \tag{4.2.1.36}$$

formülleriyle belirlenir.

m ' nin tamsayı olması halinde (4.2.1.10) diferansiyel denklemine karşı gelen indis denklemi tekil noktaları civarında $a^2=0$ şeklindedir. Dolayısıyla seriye açma yoluyla, denklemin iki bağımsız çözümünden ancak biri belirlenebilir. Diğer bağımsız çözümü elde edebilmek için (4.2.1.10) denklemi yardımıyla (4.2.1.22) ifadesinden $Q_n(x)$ ile gösterilen bu bağımsız çözümün

$$\begin{aligned} Q(x) &= P_n(x)\int\frac{1}{[P_n(x)]^2}\exp\left[-\int_0^x\frac{-2x'dx'}{1-x'^2}\right]dx \\ Q_n(x) &= P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2} \end{aligned} \tag{4.2.1.37}$$

olduğu görülür ve bu çözüm genellikle

$$Q_n(x)=-P_n(x)\int_{\infty}^{x}\frac{d\xi}{(\xi^2-1)[P_n(\xi)]^2} \tag{4.2.1.38}$$

şeklinde gösterilir.

$q_{n-1}(x)$ $(n-1)$'inci dereceden bir polinomu göstermek üzere $Q(x)$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+q_{n-1}(x) \tag{4.2.1.39}$$

şeklinde de yazılabilir. Fakat $Q_n(x)$ çok değerli bir fonksiyon olduğundan bunu tek değerli kılmak için kompleks düzlem -1'den +1'e kadar kesilir ve $Q_n(x)$ de reel $x=1$ için reel olarak tanımlanır.

Eğer $-1<x<+1$ ise

$$Q_n(x\pm i\varepsilon)=\frac{1}{2}P_n(x)\left[\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|\mp i\pi\right]+q_{n-1}(x) \tag{4.2.1.40}$$

dir. Buradan $Q_n(x)$'in (4.2.1.39) denkleminden yararlanarak

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\left[Q_n(x+i\varepsilon)+Q_n(x-i\varepsilon)\right] \tag{4.2.1.41}$$

şeklinde aritmetik ortalama olarak tanımlanabileceği görülür.

$\phi_n(x)$ n'inci dereceden bir polinom olsun. Dik polinomlar arasında; A_n, B_n ve C_n sabitler olmak üzere

$$\phi_{n+1}(x)-(A_nx+B_n)\phi_n(x)+C_n\phi_{n-1}(x)=0 \tag{4.2.1.42}$$

şeklinde rekürans bağıntısı vardır.

4.2.2 Legendre Fonksiyonları İçin Rekürans Bağıntıları, Özel İfadeler Ve Bazı Gösterimler

Legendre Fonksiyonları için bazı rekürans bağıntıları, özel ve asimptotik ifadeler ile bu fonksiyonların diğer özel fonksiyonlarla ifadeleri aşağıda verilmiştir.

$$P_n'(x)=\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]}(2n-4r-1)P_{n-2r-1}(x) \tag{4.2.2.1}$$

$$xP_n(x)=\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) \tag{4.2.2.2}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \tag{4.2.2.3}$$

$$P_{n+1}'(x)-P_{n-1}'(x)=(2n+1)P_n(x) \tag{4.2.2.4}$$

$$xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x) \tag{4.2.2.5}$$

$$P_n'(x)-xP_{n-1}'(x)=nP_{n-1}(x) \tag{4.2.2.6}$$

$$(x^2-1)P_n'(x)=ixP_n(x)-nP_{n-1}(x) \tag{4.2.2.7}$$

$$(x^2-1)P_n'(x)=(n+1)P_{n+1}(x)-(n+1)xP_n(x) \tag{4.2.2.8}$$

$$\sum_{r=0}^{n}(2r+1)P_r(x)P_r(y)=\frac{n+1}{x-y}\{P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)P_{n+1}(y)\} \tag{4.2.2.9}$$

$$P_n^{m+n}(x)-\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m(x)+\{n(n+1)-m(m-1)\}P_n^{m-1}(x)=0 \tag{4.2.2.10}$$

$$(2n+1)xP_n^m(x)=(n+m)P_{n-1}^m(x)+(n-m+1)P_{n+1}^m(x) \tag{4.2.2.11}$$

$$\sqrt{1-x^2}P_n^m(x)=\frac{1}{2n+1}\left\{P_{n+1}^{m+1}(x)-P_{n-1}^{m+1}(x)\right\} \tag{4.2.2.12}$$

$$\sqrt{1-x^2}P_n^m(x)=\frac{1}{2n+1}\left\{(n+m)(n+m+1)P_{n-1}^{m-1}(x)-(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(x)\right\} \tag{4.2.2.13}$$

$$P_\nu^\mu(z)=P_{-\nu-1}^\mu(z) \tag{4.2.2.14}$$

$$e^{i\mu\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)Q_\nu^{-\mu}(z)=e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)Q_\nu^\mu(z) \tag{4.2.2.15}$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\sin[\pi(\nu+\mu)]-Q_{-\nu-1}^\mu(z)\sin[\pi(\nu-\mu)]=\pi e^{i\mu\pi}\cos(\nu\pi)P_\nu^\mu(z)$$

(4.2.2.16)

$$Q_\nu^\mu(z)\sin(\mu\pi)=\frac{1}{2}\pi e^{i\mu\pi}\left[P_\nu^\mu(z)-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z)\right] \quad (4.2.2.17)$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_\nu^\mu(z)-(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)\right] \quad (4.2.2.18)$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\left[P_\nu^{-\mu}(z)+(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)\right] \quad (4.2.2.19)$$

$\mu=m\ \ (\ m=1,2,3,\ldots\ )$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z) \quad (4.2.2.20)$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{e^{-i\mu\pi}\Gamma(\nu-\mu+1)}{\pi\cos(\mu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)}\sin[\pi(\nu-\mu)]\cdot\left[Q_\nu^\mu(z)-Q_{-\nu-1}^\mu(z)\right] \quad (4.2.2.21)$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(z)-Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\cos(\mu\pi)\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\nu-\mu)P_\nu^{-\mu}(z) \quad (4.2.2.22)$$

$$P_\nu^\mu(-z)=e^{\mp i\mu\pi}P_\nu^\mu(z)-(2/\pi)\,e^{-i\mu\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]Q_\nu^\mu(z) \quad (4.2.2.23)$$

$$Q_\nu^\mu(z)e^{-i\mu\pi}\sin[\pi(\nu+\mu)]=1/2\pi\left[e^{\mp i\mu\pi}P_\nu^\mu(z)-P_\nu^\mu(-z)\right] \quad (4.2.2.24)$$

$$Q_\nu^\mu(-z)=-e^{\pm i\nu\pi}Q_\nu^\mu(z) \quad (4.2.2.25)$$

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}(1/2\pi)^{1/2}\Gamma(\nu+\mu+1)\left(z^2-1\right)^{-1/4}P_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}\left[z\left(z^2-1\right)^{-1/2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\ z>0$$

(4.2.2.26)

$$2Q_\nu^\mu(z)\sin(\mu\pi)=\pi\left[P_\nu^\mu(x)\cos(\mu\pi)-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\mu^{-\nu}(x)\right] \quad (4.2.2.27)$$

$$P_\nu^\mu(-x)=P_\nu^\mu(x)\cos[\pi(\nu+\mu)]-(2/\pi)Q_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)] \quad (4.2.2.28)$$

$$0<x<1$$

$$Q_\nu^\mu(-x)=-Q_\nu^\mu(x)\cos[\pi(\nu+\mu)]-(1/2\pi)P_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)]$$

$$0<x<1$$

(4.2.2.29)

$$\Gamma(\nu+\mu+1)Q_\nu^{-\mu}(x)=\Gamma(\nu-\mu+1)\left[Q_\nu^{\mu}(x)\cos(\mu\pi)+1/2\,\pi P_\nu^{\mu}(x)\sin(\mu\pi)\right] \tag{4.2.2.30}$$

$$P_n^m(-x)=(-1)^{m+n}P_n^m(x);\quad Q_n^m(-x)=(-1)^{m+n+1}Q_n^m(x) \tag{4.2.2.31}$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{-1/2}2^{\mu+1}(\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \times\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(1/2+\mu)_\ell(\ell+\nu+\mu)_\ell}{\ell!(\nu+3/2)_\ell}\sin[(2\ell+\nu+\mu+1)\theta] \tag{4.2.2.32}$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{1/2}2^{\mu}(\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)} \times\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(1/2+\mu)_\ell(\ell+\nu+\mu)_\ell}{\ell!(\nu+3/2)_\ell}\cos[(2\ell+\nu+\mu+1)\theta] \tag{4.2.2.33}$$

$$\Gamma(\nu+3/2)P_\nu^\mu(\cos\theta)=2^{1/2}(\pi\sin\theta)^{-1/2}\Gamma(\nu+\mu+1) \times\sum_{\ell=0}^{\infty}(-1)^\ell\frac{(1/2+\mu)_\ell(1/2-\mu)_\ell}{\ell!(2\sin\theta)^\ell(\nu+3/2)_\ell} \tag{4.2.2.34}$$

$$P_\nu^\mu(z)=(z^2-1)^{1/2m}\frac{d^m}{dz^m}P_\nu(z),\qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.2.2.35}$$

$$Q_\nu^\mu(z)=(z^2-1)^{1/2m}\frac{d^m}{dz^m}Q_\nu(z),\qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.2.2.36}$$

$$P_\nu^\mu(x)=(-1)^m(1-x^2)^{1/2m}\frac{d^m}{dx^m}P_\nu(x),\qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.2.2.37}$$

$$(2\nu+1)zP_\nu^\mu(z)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z) \tag{4.2.2.38}$$

$$P_{\nu-1}^\mu(z)-P_{\nu+1}^\mu(z)=-(2\nu+1)(z^2-1)^{1/2}P_\nu^{\mu-1}(z) \tag{4.2.2.39}$$

$$zP_\nu^\mu(z)-P_{\nu+1}^\mu(z)=-(\nu+\mu)(z^2-1)^{-1/2}P_\nu^{\mu-1}(z) \tag{4.2.2.40}$$

$$\frac{d}{dz}P_\nu^\mu(z)=(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(z^2-1)^{-1/2}P_\nu^{\mu-1}(z)-\frac{\mu z}{z^2-1}P_\nu^\mu(z) \tag{4.2.2.41}$$

$$\Gamma(1/2-\mu)\left[P_{-1/2}^\mu(\cos\theta)+2\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1/2}^\mu(\cos\theta)\cos(n\upsilon)\right] =\begin{cases}(2\pi)^{1/2}(\sin\theta)^\mu(\cos\upsilon-\cos\theta)^{-\mu-1/2} & 0\le\upsilon<\theta\\ 0 & \theta<\upsilon<\pi\end{cases} \tag{4.2.2.42}$$

$$\Gamma(1/2-\mu)\left[P^{\mu}_{-1/2}(-\cos\upsilon)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n P^{\mu}_{n-1/2}(-\cos\upsilon)\cos(n\theta)\right] = \begin{cases} (2\pi)^{1/2}(\sin\upsilon)^{\mu}(\cos\upsilon-\cos\theta)^{-\mu-1/2} & \upsilon<\theta<\pi \\ 0 & 0<\theta<\upsilon \end{cases} \tag{4.2.2.43}$$

$$\Gamma(1/2-\mu)\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\mu}(\cos\theta)\cos(n+1/2)\upsilon = \begin{cases} (1/2\pi)^{1/2}(\sin\theta)^{\mu}(\cos\upsilon-\cos\theta)^{-\mu-1/2} & 0<\upsilon<\theta \\ 0 & \theta<\upsilon<\pi \end{cases} \tag{4.2.2.44}$$

$$P_{\nu}(z)+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_{\nu}^{m}(z)\cos[m(\mu-\phi)] = \left[z\left(z^2-1\right)^{1/2}\cos(\mu-\phi)\right]^{\nu}, \quad \text{Re } z>0 \tag{4.2.2.45}$$

$$\Gamma(1-\mu)P_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = (1/2\sin\theta)^{-\mu}F\left[1+\nu-\mu,-\nu-\mu;1-\mu;(\sin 1/2\theta)^2\right] \quad 0<\theta<\pi \tag{4.2.2.46}$$

$$\Gamma(1-\mu)P_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = (\cot 1/2\theta)^{\mu}F\left[-\nu,\nu+1;1-\mu;(\sin 1/2\theta)^2\right] \quad 0<\theta<\pi \tag{4.2.2.47}$$

$$\Gamma(\nu-m+1)m!P_{\nu}^{\mu}(z) = 2^{-m}\Gamma(\nu+m+1)\left(z^2-1\right)^{1/2m}F(1+m+\nu,m-\nu;1+m;1/2-1/2z) \tag{4.2.2.48}$$

$$\Gamma(\nu-m+1)m!P_{\nu}^{\mu}(x) = (-2)^{-m}\Gamma(\nu+m+1)\left(1-x^2\right)^{1/2m}F(1+m+\nu,m-\nu;1+m;1/2-1/2x) \tag{4.2.2.49}$$

$$\begin{cases} P_{\nu}^{1/2}(z) = (2\pi)^{-1/2}\left(z^2-1\right)^{1/4}\left\{\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]^{\nu+1/2}+\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]^{-\nu-1/2}\right\} \\ Q_{\nu}^{1/2}(z) = i(\pi/2)^{1/2}\left(z^2-1\right)^{-1/4}\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\right]^{-\nu-1/2} \end{cases} \tag{4.2.2.50}$$

$$\begin{cases} P_\nu^{-1/2}(z) = (2/\pi)^{1/2} \dfrac{(z^2-1)^{-1/4}}{2\nu+1} \left\{ \left[z + (z^2-1)^{1/2} \right]^{\nu+1/2} - \left[z + (z^2-1)^{1/2} \right]^{-\nu-1/2} \right\} \\ Q_\nu^{-1/2}(z) = i(2\pi)^{1/2} \dfrac{(z^2-1)^{-1/4}}{2\nu+1} \left[z + (z^2-1)^{1/2} \right]^{-\nu-1/2} \end{cases}$$

(4.2.2.51)

$$\begin{cases} P_\nu^{-\nu}(z) = 2^{-\nu}(z^2-1)^{1/2\nu} / \Gamma(\nu+1) \\ P_\nu^{-\nu}(\cos\theta) = 2^{-\nu}(\sin\theta)^\nu / \Gamma(\nu+1) \end{cases} \tag{4.2.2.52}$$

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{n!\Gamma(1/2-n)} F(-n, n+1/2; 1/2; z^2) \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} F(-n, n+1/2; 1/2; z^2) \end{aligned} \tag{4.2.2.53}$$

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(z) &= \frac{-2\pi^{1/2} z}{n!\Gamma(-1/2-n)} F(-n, n+3/2; 3/2; z^2) \\ &= \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} z F(-n, n+3/2; 3/2; z^2) \end{aligned} \tag{4.2.2.54}$$

$$\begin{aligned} P_n(\cos\theta) = \frac{2^{2n+2}(n!)^2}{\pi(2n+1)!} \Bigg[& \sin(n+1)\theta + \frac{n+1}{2n+3}\sin(n+3)\theta \\ & + \frac{1.3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta + \frac{1.3.5}{3!}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\sin(n+7)\theta + \ldots \Bigg] \end{aligned}$$

(4.2.2.55)

$$\begin{aligned} Q_n(\cos\theta) = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \Bigg[& \cos(n+1)\theta + \frac{n+1}{2n+3}\cos(n+3)\theta \\ & + \frac{1.3}{2!}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta + \frac{1.3.5}{3!}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cos(n+7)\theta + \ldots \Bigg] \\ & 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

(4.2.2.56)

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} \Gamma\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2} \right) \tag{4.2.2.57}$$

$$\begin{aligned} Q_\nu^\mu(x) &= \frac{1}{2} e^{-\mu\pi i} \left[e^{-1/2\mu\pi i} Q_\nu^\mu(x+i0) + e^{1/2\mu\pi i} Q_\nu^\mu(x-i0) \right] \\ &= \frac{\pi}{2\sin\mu\pi} \left[P_\nu^\mu(x)\cos\mu\pi - \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} P_\nu^{-\mu}(x) \right] \end{aligned} \tag{4.2.2.58}$$

$$P_\nu(z)=\left(\frac{z+1}{2}\right)^\nu F\left(-\nu,-\nu;1;\frac{z-1}{z+1}\right) \tag{4.2.2.59}$$

$$P_n(\cos\varphi)=F\left(n+1,-n;1;\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{4.2.2.60}$$

$$P_n(\cos\varphi)=(-1)^n F\left(n+1,-n;1;\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{4.2.2.61}$$

$$P_n(\cos\varphi)=\cos^2\frac{\varphi}{2}F\left(-n,-n;1;-\tan^2\frac{\varphi}{2}\right) \tag{4.2.2.62}$$

$$Q_\nu^\mu(z)\sin[\pi(\nu+\mu)]-Q_{-\nu-1}^\mu(z)\sin[\pi(\nu-\mu)]=\pi e^{i\mu\pi}\cos(\nu\pi)P_\nu^\mu(z) \tag{4.2.2.63}$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_\nu^\mu(z)-(2/\pi)e^{-i\mu\pi}\sin(\mu\pi)Q_\nu^\mu(z)\right] \tag{4.2.2.64}$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(z) \tag{4.2.2.65}$$

$$\pi\Gamma(1+\mu)P_\nu^\mu(z)=\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2\mu}\sin(\mu\pi) \tag{4.2.2.66}$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{-1/2}2^{\mu+1}(\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(1/2+\mu)_\ell(1+\nu+\mu)_\ell}{\ell!(\nu+3/2)_\ell}\sin[(2\ell+\nu+\mu+1)\theta] \tag{4.2.2.67}$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\pi^{1/2}2^\mu(\sin\theta)^\mu\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(1/2+\mu)_\ell(1+\nu+\mu)_\ell}{\ell!(\nu+3/2)_\ell}\cos[(2\ell+\nu+\mu+1)\theta] \tag{4.2.2.68}$$

$$P_n(z)=F\left(-n,n+1;1;\frac{1-z}{z}\right) \tag{4.2.2.69}$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}(\sinh t)^{2\nu+1}dt \qquad \mathrm{Re}(-\mu)>\mathrm{Re}\,\nu>-1 \tag{4.2.2.70}$$

$$\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+1/2)Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\pi^{1/2}2^{-\mu}\Gamma(\nu+\mu+1)\left(z^2-1\right)^{\mu/2}$$
$$\times\int_0^\infty\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\cosh t\right]^{-\nu-\mu-1}(\sinh t)^{2\mu}\,dt$$

(4.2.2.71)

$$Q_\nu^\mu(\cosh\alpha)=(1/2\pi)^{1/2}e^{\mu\pi i}\frac{(\sinh\alpha)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_a^\infty e^{-(\upsilon+1/2)\upsilon}(\cosh\upsilon-\cosh a)^{-\mu-1/2}\,d\upsilon$$
$$a>0\ ,\ \mathrm{Re}(\upsilon+\mu+1)>0\ ,\ \mathrm{Re}\,\mu<1/2$$

(4.2.2.72)

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\pi^{-1/2}2^\mu\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\pi\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\cos t\right]^{\nu+\mu}(\sin t)^{-2\mu}\,dt$$
$$\mathrm{Re}\,\mu<1/2$$

(4.2.2.73)

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{\mu\pi i}2^{-\nu-1}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}\int_0^\pi(z+\cos t)^{\mu-\nu-1}(\sin t)^{2\nu+1}\,dt$$
$$\mathrm{Re}\,\nu>-1\ ,\ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0$$

(4.2.2.74)

$$P_\nu^\mu(\cosh\alpha)=(1/2\pi)^{-1/2}\frac{(\sinh\alpha)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)}\left\{\int_\alpha^\infty\frac{\sin(\mu\pi)\cosh[(\nu+1/2)t]}{(\cosh t-\cosh\alpha)^{\mu+1/2}}dt\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty\frac{\sin(\mu\pi)\cosh[(\nu+1/2)t]}{(\cosh t+\cosh\alpha)^{\mu+1/2}}dt\right\}\qquad(4.2.2.75)$$
$$\mathrm{Re}\,\mu<1/2\ ,\ \ \mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0\ ,\ \ \mathrm{Re}(\mu-\nu)>0$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=(1/2\pi)^{-1/2}\frac{\Gamma(\mu+1/2)\left(z^2-1\right)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{-\mu-1/2}\cosh[(\nu+1/2)t]dt$$
$$\mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0\ ,\ \ \mathrm{Re}(\mu-\nu)>0$$

(4.2.2.76)

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\cosh t\right]^{-\nu-1}dt\qquad(4.2.2.77)$$
$$\mathrm{Re}(\nu\pm\mu)>-1\ ,\qquad\nu\neq-1,-2,-3,\ldots$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-\mu)}\left\{\int_0^\pi\left[z-\left(z^2-1\right)^{1/2}\cos t\right]^\nu\cos(\mu t)\,dt\right.$$
$$\left.+\sin(\mu\pi)\int_0^\infty\left[z-\left(z^2-1\right)^{1/2}\cosh t\right]^\nu e^{\mu t}\,dt\right\}$$
$$\mathrm{Re}(\nu+\mu)<0\ ,\quad \mathrm{Re}\,z>0,\quad \mathrm{Re}\,\nu>0,\quad \mu=m\ (m=0,1,2,\ldots)$$

(4.2.2.78)

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi\Gamma(\nu+1)}\int_0^\pi\left[z+\left(z^2-1\right)^{1/2}\cos t\right]^\nu\cos(mt)\,dt \qquad (4.2.2.79)$$
$$\mathrm{Re}\,z>0$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{2\pi\Gamma(\nu+1)}\int_{-\pi}^\pi\left[z\left(z^2-1\right)^{1/2}\cos t\right]^\nu e^{imt}\,dt \qquad (4.2.2.80)$$
$$\mathrm{Re}\,z>0$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\pi^{-1/2}2^\mu(\sin\theta)^{-\mu}}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\pi(\cos\theta+i\sin\theta\cos t)^{\nu+\mu}(\sin\theta)^{2\mu}\,dt$$
$$\mathrm{Re}\,\mu<1/2$$

(4.2.2.81)

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{e^{1/2i\mu\pi}\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\nu-\mu)}\left[\int_0^\pi(\cos\theta-i\sin\theta\cosh t)^\nu\cos\mu t\,dt\right.$$
$$\left.+\sin(\mu\pi)\int_0^\infty(\cos\theta+i\sin\theta\cosh t)^\nu e^{i\mu t}\,dt\right] \qquad (4.2.2.82)$$
$$0<\theta<\pi/2\ ,\ \mathrm{Re}(-\nu-\mu)>0$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-1/2}\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\theta(\cos\upsilon-\cos\theta)^{-\mu-1/2}\cos[(\nu+1/2)\upsilon]\,d\nu$$
$$0<\theta<\pi,\quad \mathrm{Re}\,\mu<1/2$$

(4.2.2.83)

$$Q_n(\cos\theta)=1/4i^{n+1}\int_{-\pi}^\pi|\sin t|^n(\sin\theta+i\cos\theta\sin t)^{-n-1}\,dt \qquad (4.2.2.84)$$

$$\Gamma(\mu)P_\nu^{-\mu}(z)=\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}\int_0^?P_\nu(t)(z-t)^{\mu-1}\,dt \qquad (4.2.2.85)$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^{-\nu}(z-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}(\sinh t)^{2\nu+1}dt \tag{4.2.2.86}$$

$$\operatorname{Re}\mu>\operatorname{Re}\nu>-1$$

$$P_\nu^\mu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^\mu\varphi}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\infty\frac{\cos(\nu+1/2)t\,dt}{(\cos t-\cos\varphi)^{\mu+1/2}} \tag{4.2.2.87}$$

$$0<\varphi<\pi\ ,\quad \operatorname{Re}\mu<1/2$$

$$P_\nu^\mu(\cosh\alpha)=\frac{\sqrt{2}\sinh^\mu\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-\mu)}\int_0^\alpha\frac{\cosh(\nu+1/2)t\,dt}{(\cosh\alpha-\cosh t)^{\mu+1/2}} \tag{4.2.2.88}$$

$$\alpha>0\ ,\quad \operatorname{Re}\mu<1/2$$

$$Q_{a-1/2}(\cos b)=\int_0^\infty\frac{x\tanh(\pi x)}{a^2+x^2}P_{-1/2+ix}(\cos b)dx \tag{4.2.2.89}$$

$$\operatorname{Re}a>0$$

$$\int_0^\infty\sinh(\pi x)\cos(ax)P_{-1/2+ix}(b)dx=\frac{1}{\sqrt{2(b+\cosh a)}} \tag{4.2.2.90}$$

$$a>0\ ,\quad |b|<1$$

$$\int_0^\infty\cos(bx)P_{-1/2+ix}(\cosh a)dx=0 \tag{4.2.2.91}$$

$$0<a<b$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}(\sinh t)^{2\nu+1}dt \tag{4.2.2.92}$$

$$\operatorname{Re}(-\mu)>\operatorname{Re}\nu>-1$$

$$Q_\nu^\mu(\cosh\alpha)=(1/2\pi)^{1/2}e^{\mu\pi i}\frac{(\sinh\alpha)^\mu}{\Gamma(1/2-\mu)}\int_\alpha^\infty e^{-(\nu+1/2)\upsilon}(\cosh\upsilon-\cosh\alpha)^{-\mu-1/2}d\upsilon \tag{4.2.2.93}$$

$$a>0\ ,\quad \operatorname{Re}(\nu+\mu+1)>0\ ,\quad \operatorname{Re}\mu<1/2$$

$$P_n(\cos\theta)\approx\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right] \tag{4.2.2.94}$$

$$n\to\infty\ \text{ ve }\ 0\le\varepsilon\le0\le\pi-\varepsilon<\pi$$

$$P_n^m(\cos\theta)\approx\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}\right] \tag{4.2.2.95}$$

$n \to \infty$ ve $0 \le \varepsilon \le \theta \le \pi - \varepsilon < \pi$

Ayrıca $P_\nu^\mu(z)$ ve $Q_\nu^\mu(z)$'nin ∞'daki davranışları

$$P_\nu^\mu(z) \approx 2^\nu \pi^{-1/2} \Gamma(\nu + 1/2) z^\nu / \Gamma(1 + \nu - \mu) \qquad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2 \qquad (4.2.2.96)$$

$$P_\nu^\mu(z) \approx 2^\nu \pi^{-\nu-1} \Gamma(-\nu - 1/2) z^{-\nu-1} / \Gamma(-\nu - \mu) \qquad \mathrm{Re}\,\nu < -1/2 \qquad (4.2.2.97)$$

$$Q_\nu^\mu(z) \approx e^{i\mu\pi}\, 2^{-\nu-1} \pi^{1/2} \Gamma(\nu + \mu + 1) z^{-\nu-1} / \Gamma(\nu + 3/2) \qquad (4.2.2.98)$$

TARTIŞMA

Kütle Difüzyon Denklemi için sunulan analitik çözüm, üründeki nem içerik dağılımını elde etmek için kullanılabilir. Yalnız elde edilen bu çözüm sadece yüzeyde denge olduğu durum için geçerlidir.

Kullanılan boyutsuz koordinatlar, herhangi bir durumda uygulanabilecek genel çözümü bulmak için yeterlidir.

Ayrıca nem içerik dağılımını elde etmek için seçilecek koordinat sistemi de önemlidir. Koordinat sisteminin seçimi cisimlerin geometrik şekline bağlıdır. Bu anlamda tarımsal ürünlerin doğadaki doğal formu Prolate Küresel olarak kabul edilmiş ve en uygun olan sistemin Prolate Küresel Koordinat Sistemi olduğu düşünülmüştür. [5]

Bölüm II' de incelenen Skaler Dalga Denkleminin Prolate Küresel Koordinatlarda ayrıştırılması sonucu üç bağımsız fonksiyon elde edilir. Bunlar; Küresel Radyal Fonksiyonlar $\left(R_{mn}\left(c,\xi\right)\right)$, Küresel Açısal Fonksiyonlar $\left(S_{mn}\left(c,\eta\right)\right)$, Sin ve Cos Fonksiyonlarıdır. Denklemin ayrıştırılması Laplace Denkleminin küresel koordinatlardaki çözümüne benzerdir. Elde edilen üç fonksiyondan ilk ikisi sırasıyla Küresel Polar Koordinatlardaki Legendre ve Küresel Bessel Fonksiyonlarının genelleştirilmiş şeklidir. Bu fonksiyonların hesaplamaları özdeğer hesaplarını ve tekrarlama formüllerini gerektirir. [1]

Büyük odak uzunluklu Küresel Dalga Fonksiyonlarının hesaplamalarında bazı zorluklarla karşılaşılır. Bunun nedeni bu fonksiyonlar arasındaki ortogonallik problemidir.

Literatür çalışması ve taraması olarak yapılan bu çalışmada, Skaler Dalga Denklemi Prolate Küresel Koordinatlarda ayrıştırılarak genel çözümü elde edilmiş ve $m=0$ özel durumu Kütle Difüzyon Denkleminin çözümünde kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

1- Flammer, C., 1957, Spheroidal wave functions, Stanford University Pres, Stanford, pp. 6-38

2- Carslaw, H. S., Jaeger J. C., 1959, Conduction of heat in solids, Oxford University Pres, New York

3- Luikov, A. V., 1968, Analytical heat diffusion theory, Academic Press, Inc. Ltd., London

4- Skelland, A. H. P., 1974, Diffusional mass transfer, John Wiley & Sons, New York

5- Antonio G. B. De Lima, Silvia A. N., Paulo H. S., 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, November 22-26 1999, Analytical solution of the mass diffusion equation applied to ellipsoids of revolution, Sao Paulo

6- Haji-Sheikh A., Sparrow E. M., 1966, Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid, Journal of Heat Transfer, v.88, n.3, pp. 331-333

7- Abramowitz, M.& Stegun, I. A., 1972, Handbook of mathematical functions, Dover Publications, Inc., New York, pp. 752-772

8- Bleeker, D., Csordas, G., 1996, Basic partial differential equations, International Press, Cambridge, Massachusetts

9- William, J. T., 1999, Spheroidal wave functions, Computing in Science&Engineering

10- Bitsadze, A. V., 1980, Equations of mathematical physics, Mir Publishers

11- Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G., 1955, Higher transcendental functions, McGraw-Hill Book Company, Inc., Volume III

12- Garabedian, P. R., 1964, Partial differential equations, John Wiley&Sons

13- Bell, W. W., 1968, Special functions for scientists and engineers, D. Van Nostrand Company Ltd

14- Haberman, R., 1987, Elementary applied partial differential equations, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey

15- Çağlayan, M., Çelebi, O., 2002, Kısmi diferansiyel denklemler, Vipaş A. Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı

16- Murray, R. S., 1963, Theory and problems of advanced calculus, McGraw-Hill, Inc., pp. 134-143

17- Gradsteyn, I. S., Rhyzik, I. M., 1980, Tables of integrals series and products, Academic, New York

18- Stratton, J. A., Morse, P. M., Chu, L. J., Little, J. D. C. & Corbato, F. J., 1956, Spheroidal wave functions, The Tech. Pres of M.I.T. and John Wiley & Sons, Inc., New York

19- Lima, A. G. B., Nebra, S. A., 2000, Theoretical analysis of the diffusion process inside prolate spheroidal solids, Drying Technology, 18. No. 1-2

20- Payne, F. R., Corduneanu, C. C., Haji-Sheikh, A., Huang, T., 1986, Integral methods in science and engineering. Chapter: On solution of parabolic partial differential equations using galerkin functions, Hemisphere Publishing Corporation, New York

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Pınar NAYİR

Doğum Yeri : İPSALA/EDİRNE

Doğum Tarihi : 14.08.1975

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul : Merkez İlkokulu

Ortaokul : Anafartalar İlköğretim Okulu

Lise : Edirne Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans : Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Matematik Öğretmenliği Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi

1998 yılında Özel Edirne Beykent Koleji'nde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladım. 2000 yılına kadar bu görevi sürdürdüm. 2000-2001 Eğitim-Öğretim yılında Şükrüpaşa İlköğretim Okulu'nda İngilizce Öğretmenliği yaptım. 2001-2003 yılları arasında Edirne Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak çalıştım. 2003 tarihinde Edirne Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım. Halen bu görevi sürdürmekteyim.