TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mehmet ÖZCEYLAN

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK
ANABİLİM DALI
2006
EDİRNE
Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Adem DALGIÇ

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR PARAMETRELİ LİE GRUPLARININ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Mehmet ÖZCEYLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Adem DALGIÇ

2007
EDİRNE

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR PARAMETRELİ LİE GRUPLARININ DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Mehmet ÖZCEYLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 11/01/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmişitr.

Prof. Dr. Hasan AKBAŞ
Üye

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
Üye

Yard. Doç. Dr. Adem DALGIÇ
Danışman

ÖZET

Diferansiyel denklemlerin bir parametreli Lie grubu dönüşümleri yardımı ile çözülmesinin anlatıldığı bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır. I. bölümde bir parametreli dönüşümlerin, Lie grup yapısı ile bu dönüşümlerden ortaya çıkan grup operatörü ve bu operatörün temel özellikleri, yörünge, invaryant noktalar, eğriler ve fonksiyonlar ile ilgili tanımlar verilmiştir. Bunun yanında değişken değiştirme ve kanonik değişkenlerin tanımlanması anlatılmış ve bölümün son konusunda tüm anlatılanlar 3 ve n değişkenli durumda tekrar özetlenmiştir.

II. bölümde genişletilmiş dönüşüm grupları ve genişletilmiş grup operatörü tanımlanarak, birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin altında invaryant oldukları grup operatörleri yardımı ile çözülmesi anlatılmıştır.

III. bölümde genişletilmiş grup operatörü daha da genellenerek, ikinci mertebe diferansiyel denklemlerin verilen bir grup altında invaryant olması koşulları anlatılmış ve bu koşullar n inci mertebeden diferansiyel denklemler için de incelenmiştir. IV. bölümde, birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin tam sistem oluşturma koşulu incelenerek, bu denklemlerin altında invaryant oldukları operatörler ile tam sistem oluşturmasına dayanan bir çözüm metodu verilmiştir.

V. bölümde ikinci mertebe adi diferansiyel denklemlerin bir veya iki grup operatörü altında invaryant olma koşulu incelenmiştir. VI. bölümde çalışılan konun genel değerlendirmesi ve tartışması yapılmıştır.

EK-A ve EK-B de bölümlerde anlatılan metotların birer uygulaması yapılarak, EK-C de birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri, altında invaryant olduğu gruplara göre sınıflandıran bir tabloya yer verilmiştir.

SUMMARY

This study , which explains the solution of differantial equations with the help of one parameter Lie Group transformations , consists of six chapters. In chapter I, one-parameter transformations, the infinitesimal transformation obtained from these Lie Group structure transformations, and basic characteristics of these transformations and the definitions of orbit, invariant points, curves and functions are given. Besides this, the definitions of variable change and canonical variables are explained, and at the last part of this chapter, all the explained information is summarized again with 3 and n-variable structures.

In Cahapter II, the concept of extended transformation groups and operators is introduced and the solution of the first order differantial equations with the help of the group operastors under which these equations are invariant is explained.

In Chapter III, the concept of extended group operator is more generalized and the conditions of invariant structure of second order differantial equations with a given group operator are discussed, and these conditions are examined for n^{th} order differantial equations. In Chapter IV, the condition of formation of a complete system from the first order linear partial differantial equations is discussed, and a method of solution depending on the formation of complete system with the operators under which these equations are invariant is given.

In Chapter V, the condition in which the second order ordinary differantial equations become invariant under one or two group operator is discussed. In Chapter VI, a general evaluation and discussion of this study is given.

In EK-A and EK-B, an application of the given methods are explained, and the first order ondinary differantial equations and the group operators under which they become invariant are listed in a table in EK-C.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın en başından en sonuna kadar büyük katkılarından dolayı danışman hocam Yard. Doç. Dr Adem DALGIÇ'a, en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Mehmet ÖZCEYLAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET …… i
SUMMARY …… ii
ÖNSÖZ …… iii

I. BÖLÜM / BİR PARAMETRELİ LİE GRUPLARI ……..…… 1

1.1 Giriş ……..….. 1
1.2. Dönüşümler Grubu ……...…. 3
1.3. Sonsuz Küçük Dönüşüm ……..……..… 5
1.4. Lie Operatörü……...……...…… 5
1.5. Lie Operatörünün Ürettiği Dönüşüm Grubu ……..……..… 6
1.6. Lie Operatöründen Dönüşüm Grubunun Bulunmasında İkinci Yol ….….. 8
1.7. İnvaryantlar ……....… 9
1.8. Yörüngeler, İnvaryant Noktalar Ve İnvaryant Eğriler ……..…...…….. 10
1.9. İnvaryant Eğriler Ailesi ……..... 12
1.10. Değişkenlerin Değiştirilmesi …….…. 14
1.11. Kanonik Form Ve Değişkenler …..……... 16
1.12. İkiden Fazla Değişken İçeren Gruplar …….…….... 18

II. BÖLÜM / BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER ... 23

2.1. İntegrasyon Çarpanı ……...….. 23
2.2. Genişletilmiş Lie operatörü Altında İnvaryant Diferansiyel Denklem 25
2.3. Bir Diferansiyel Denklemin Verilen Bir Grup Altında İnvaryantlığı İçin İkinci Kriter 28
2.4. İki İntegrasyon Çarpanı …….……. 31
2.5. Bir Diferansiyel Denklemin İnvaryant Bırakan Grup Operatörü İçin Genel İfade 33

2.6. Belirli Bir Grup Operatörü Altında İnvaryant Diferansiyel Denklemler . 35
2.7. Değişkenlerin Ayrılması …….. 36

III. BÖLÜM / İKİ VE DAHA YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMELER ……..… 39

3.1. İki Kez Genişletilmiş, *n* Kez Genişletilmiş Grup …… 39
3.2. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem ….41
3.3. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkiden Yüksek Mertebeli Diferansiyel Denklem ……..…….. 44

IV. BÖLÜM / BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER …… 47

4.1. Tam Sistem ……..…. 47
4.2. Tam Sistemin Çözüm Metodu ……..… 54
4.3. Çözümün İkinci Metodu ……..…. 54
4.4. Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem.. 56
4.5. Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözüm Metodu ……...…….. 58
4.6. Jacobi Özdeşliği …… 59
4.7. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem ……..……...…… 59

4.8. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmı Diferansiyel Denklemin Çözüm Metotları ……..…61

V. BÖLÜM / İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER …....…66

5.1. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem ……..... 66
5.2. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem ……..…….67

5.3. İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Denklemi İnvaryant Bırakan Lineer Bağımsız Grup Operatörlerinin Sayısı ……..……...… 67

VI. BÖLÜM …….…..... 71

6.1. Tartışma …….…..…. 71

EKLER ……..…… 72

EK-A ……...…... 72
EK-B ……..……. 79
EK-C ……..……. 85

KAYNAKLAR ……...……...…… 87
ÖZGEÇMİŞ ……. 89

I. BÖLÜM

BİR PARAMETRELİ LİE GRUPLARI

1.1 Giriş

Burada anlatılan konulara genel bir bakış açısı sağlamak ve konu hakkında basitçe bir fikir edinmek için bu çalışmanın ana temasını oluşturan diferansiyel denklemler ve Lie Teorisi'nin kronolojik gelişim süreci, genel çalışmaya bir giriş olarak aşağıda kısaca anlatılmıştır.

Diferansiyel denklemlerin gelişimi ile matematiğin gelişimi birbirinden ayrılmaz parçalardır. Diferansiyel denklem konusu 17.yüzyılda İsaac Newton'un (1642–1727) ve Wilhelm Leibniz'in (1646–1716) çalışmalarına dayanır. Newton, uzayda hareket eden cisimlerin durumlarını matematiksel olarak betimlemek için kullandığı birinci mertebeden diferansiyel denklemleri $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ ve $dy/dx = f(x, y)$ formlarına göre sınıflandırmıştır. Leibniz, Newton'dan çok kısa bir süre sonra bağımsız olarak çok temel sonuçlara ulaşmış, matematiksel gösterimleri daha kuvvetli biçimde kullanmıştır. Günümüzde kullanılan dy/dx ve $\int f(x)dx$ gösterimleri ona aittir. Leibniz 1691 de diferansiyel denklemlerin değişkenlere ayrılarak çözülmesi metodunu, homojen denklemlerin değişkenlerine ayrılabilir türe indirgenmesini ve lineer denklemlerin çözüm prosedürünü ortaya koymuştur. Jacob (1654–1705) ve Johann (1667–1748) Bernoulli kardeşler diferansiyel denklemlerin çözüm metotları konusunda çok daha ileri gelişimler sağlamışlar ve uygulama alanlarını genişletmişlerdir. Onlar, mekaniğin birçok problemini diferansiyel denklem olarak formüle ederek çözmüşler ve ilgili makalelerde modern anlamda "integral" terimini ilk defa kullanmışlardır. 18. yüzyılın en büyük matematikçisi hiç şüphesiz ki Leonhard Euler'dir (1707–1783) ve kendisi Johann Bernoulli'nin öğrencisidir. Euler 1734-35 yıllarında birinci mertebeden diferansiyel denklemler için tamlık koşulunu tanımlamış

ve ilgili makalede integrasyon çarpanları teorisini geliştirmiştir. İlave olarak sabit katsayılı homojen lineer denklemler için genel çözüm metodunu vermiştir. 1762–65 yılları arasında Joseph Louis Lagrange (1736–1813) *n.* mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin genel çözümünün n bağımsız çözümün bir lineer kombinasyonu olduğunu gösterir.

18. yüzyılın sonlarına kadar adi diferansiyel denklemlerin çözümü için birçok elemanter metot keşfedilmiştir. 19. yüzyılda ise bütün ilgi, varlık teklik gibi teorik sorular ile kuvvet serileri tabanlı çözüm yöntemlerine yöneldi. Bununla birlikte aynı yüzyılın sonlarına doğru, invaryant teorisi matematikteki en gösterişli araştırma alanlarından birisiydi. Sophus Lie (1842–1899), Felix Klein (1849–1925), David Hilbert, Elie Cartan (1869–1951) gibi birçok ünlü matematikçinin bu konunun gelişmesine büyük katkıları olmuştur. Gerçekten bu eski kavram günümüz matematiğinin hala çok güncel bir konusudur. İnvaryantlık kavramı yeterince karmaşık bir olgu olduğundan, yukarıda anılan yıllarda bu kelime birçok farklı anlamda kullanılmış ve birçok farklı objeye uygulanmıştır. Bizim konumuzun genel çerçevesinde invaryantlar bazı dönüşümler altında değişmez kalan objelerdir.

Lie grupları, Norveçli Matematikçi Sophus Lie tarafından kendisinin geometri ve diferansiyel denklemlerin integrasyon metotları üzerindeki çalışmalarının bir sonucu olarak tanımlandı. Sophus Lie matematikçiler arasında Lie grupları olarak adlandırılan modern teorinin doğmasını sağlayan dönüşüm teorisinin kurucusu olarak bilinir. Lie grupları sürekli geometrilerin simetrileridir ve geniş olarak geometrik invaryantların inşasında kullanılır. Bu nedenle sonlu boyutlu durumda Lie teorisi lineer cebrin bir genellemesi olarak görülür.

Bu çalışmada, bir parametreli Lie gruplarının sürekli dönüşümlerinden yola çıkılarak elde edilen infinitezimal dönüşüm operatörünün, invaryant eğriler ve fonksiyonlar kavramı ile bütünleşip nasıl birinci, ikinci ve daha yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanıldığı gösterilecektir. En genel ifade ile diferansiyel denklemi integre etme probleminin, denklemi değişmez bırakan bir parametreli grubun bulunması problemine indirgenmesi bu konunun omurgasını oluşturmaktadır. Bu çözüm metotlarının yanı sıra bu diferansiyel denklemler, altında invaryant oldukları dönüşümlere göre sınıflandırılacaklardır.

1.2. Dönüşümler Grubu

G boş olmayan bir kümeyi ve "$*$" sembolü de G üzerinde tanımlı bir ikili işlemi ifade etsin, $(G,*)$ ikilisine aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda bir grup denir.

1. $\forall a,b \in G$ için $a*b \in G$ dir,
2. $\forall a,b,c \in G$ için $(a*b)*c = a*(b*c)$ dir,
3. $\exists e \in G \ni \forall a \in G$ için $a*e = e*a = a$ sağlanır,
4. $\forall a \in G$ için $\exists a^{-1} \in G \ni a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ sağlanır.

Şimdi $\forall a \in \mathbb{R}$ için,

$$\phi : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \to \mathbb{R},\ \psi : \mathbb{R}^2 \times \{a\} \to \mathbb{R} \tag{1.2.1}$$

fonksiyonları x, y değişkenleri ve a parametresinin iki analitik fonksiyonu olsun.

$$\phi(x,y,a) = x_1\ ,\ \ \psi(x,y,a) = y_1 \tag{1.2.2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\quad (x,y) \to T_a(x,y) = \left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right) = (x_1, y_1) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

dönüşümü yazılarak aşağıdaki küme tanımlansın.

$$G = \left\{ T_a \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.2.4}$$

Eğer (1.2.4) kümesi üzerinde bir ikili işlem $\circ : G \times G \underset{(T_a,T_b)\ \to\ T_a \circ T_b}{\to} G$ ile aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bir parametreli Lie Grubu adını alır.

1. $T_a(x,y) = \left(\phi(x,y,a), \psi(x,y,a)\right)$ ve $T_b(x,y) = \left(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b)\right)$

eşitlikleri ile yazılan $\forall\ T_a, T_b \in G$ için;

$$\begin{aligned} (T_a \circ T_b)(x,y) &= T_a\left[T_b(x,y)\right] \\ &= T_a\left(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b)\right) \\ &= \left(\phi\left(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a\right), \psi\left(\phi(x,y,b), \psi(x,y,b), a\right)\right) \end{aligned}$$

işlemi sonucunda, $\left(\phi\left(\phi(x,y,b),\psi(x,y,b),a\right),\psi\left(\phi(x,y,b),\psi(x,y,b),a\right)\right)=T_c(x,y)$ eşitliğine uyan $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $T_c\in G$ vardır.

2. $\forall\, T_a,T_b,T_c\in G$ için $\left(T_a\circ T_b\right)\circ T_c=T_a\circ\left(T_b\circ T_c\right)$ dir.

3. Öyle $\exists T_{a_0}\in G$ özdeşlik dönüşümü vardır ki, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için

$$T_{a_0}(x,y)=(x,y)$$

dir.

4. $\forall T_a\in G$ için

$$T_a^{-1}\circ T_a=T_a\circ T_a^{-1}=T_{a_0}$$

sağlayan $\exists T_a^{-1}\in G$ vardır.

Burada a parametre değeri değiştikçe, T_a dönüşümleri düzlemdeki (x,y) noktalarını ϕ ve ψ analitik fonksiyonları vasıtası ile,

$$x_1=\phi(x,y,a),\quad y_1=\psi(x,y,a) \tag{1.2.4}$$

olacak şekilde (x_1,y_1) noktalarına taşımaktadırlar. Bir parametreli Lie grubunu inşa eden ϕ ve ψ fonksiyonlarına grubun sonlu dönüşümleri denir. Parametrenin sonsuz küçük artımda değişmesi durumunda (x,y) noktası da sonsuz küçük miktarda yer değiştirerek (x_1,y_1) noktasına dönüşecektir. Geometrik açıdan bakıldığında, bu dönüşümlerin sürekliliği (x,y) noktalarını bir takım eğriler üzerindeki çeşitli noktalara dönüştürecektir. Böyle eğrilere bir parametreli dönüşüm grubunun yörüngeleri denir.

x_1 ve y_1 değişken, x_0 ve y_0 sabit olarak düşünüldüğünde, $x_1=\phi(x_0,y_0,a)$, $y_1=\psi(x_0,y_0,a)$ denklemlerinin, sabit (x_0,y_0) noktasından geçen yörüngenin parametrik denklemleri olduğu açıktır. Sonuç olarak, herhangi (x_0,y_0) noktasına karşılık gelen yörünge denklemi (1.2.3) deki iki denklemden a parametresinin yok edilmesi ile elde edilebilir.

1.3. Sonsuz Küçük Dönüşüm

Şimdi dönüşüm grubunun sonlu dönüşümleri olan $\phi(x, y, a)$, $\psi(x, y, a)$ fonksiyonlarını Taylor serisine açalım. Bu durumda,

$$x_1 = \phi(x, y, a_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \cdots, \quad y_1 = \psi(x, y, a_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0} \delta a + \cdots \tag{1.3.1}$$

elde edilir. $\phi(x, y, a_0) = x$, $\psi(x, y, a_0) = y$ olduğundan,

$$x_1 - x = \delta x = \left(\frac{\delta \phi}{\delta a}\right)_{a_0} + \cdots, \quad y_1 - y = \delta y = \left(\frac{\delta \psi}{\delta a}\right)_{a_0} + \cdots \tag{1.3.2}$$

şeklinde olur. Elde edilen son ifadede a_0 sabit bir parametre değeri olduğundan $\left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0}$ ve $\left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0}$ ifadelerinin değişkenleri x ve y dir. Burada ,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0} = \xi(x, y) \qquad \text{ve} \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0} = \eta(x, y) \tag{1.3.3}$$

şeklinde yazıldığında dönüşüm,

$$\delta x = \xi(x, y)\delta a + \cdots, \quad \delta y = \eta(x, y)\delta a + \cdots \tag{1.3.4}$$

halini alır. Bu durumda x ve y de sonsuz küçük değişim üreten dönüşüm,

$$\delta x = \xi(x, y)\delta a, \qquad \delta y = \eta(x, y)\delta a \tag{1.3.5}$$

şeklini alır. Bu (1.3.5) dönüşümü sonsuz küçük dönüşüm olarak adlandırılır.

1.4. Lie Operatörü

$f(x, y)$ x ve y nin analitik bir fonksiyonu olsun. Sonsuz küçük dönüşümü bu fonksiyona $f(x + \xi\delta a, y + \eta\delta a)$ şeklinde uygulayarak Taylor serisine açalım. Bu durumda,

$$f(x + \xi\delta a, y + \eta\delta a) = f(x, y) + \left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta a + \cdots \tag{1.4.1}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi,

$$f(x+\xi\delta a, y+\eta\delta a)-f(x,y)=\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta a+\cdots \tag{1.4.2}$$

şeklinde yazıp (1.4.2) ifadesinde,

$$\delta f = f(x+\xi\delta a, y+\eta\delta a)-f(x,y) \tag{1.4.3}$$

ve

$$Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.4.4}$$

olarak aldığımızda,

$$\delta f = Uf\delta a+\cdots \tag{1.4.5}$$

eşitliğine ulaşırız. Burada elde ettiğimiz $U=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$ ifadesine *Lie operatörü* denir. Ayrıca sonsuz küçük operatör, grup operatörü, grup üreteci gibi terimler de bu operatör için kullanılır.

1.5. Lie Operatörünün Ürettiği Dönüşüm Grubu

Konu 1.3 de grubun sonsuz küçük dönüşümünün bulunması için bir metot kullanıldı. Bunun tersi de mümkündür, sonsuz küçük dönüşüm bilindiğinde bir parametreli grubun sonlu dönüşümleri elde edilebilir. Sonsuz küçük dönüşüm

$$\delta x=\xi(x,y)\delta t\,,\quad \delta y=\eta(x,y)\delta t \tag{1.5.1}$$

(x,y) noktasını, komşu $(x+\xi\delta t, y+\eta\delta t)$ pozisyonuna taşır. Bu dönüşümün sonsuz defa tekrarlanması sonucu nokta tam olarak, (x,y) noktasından geçen ve

$$\frac{dx_1}{dt}=\xi(x_1,y_1)\,,\qquad \frac{dy_1}{dt}=\eta(x_1,y_1) \tag{1.5.2}$$

diferansiyel denklem sisteminin integral eğrisi olan bir eğri boyunca taşınır. Yukarıdaki işlemin belli bir aşamasında x ve y, x_1 ve y_1 e dönüşür ve dönüşüm formülü (1.5.2) nin veya bunlara denk olan,

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1,y_1)}=\frac{dy_1}{\eta(x_1,y_1)}=\frac{dt}{1} \tag{1.5.3}$$

denklem sisteminin çözümleri ile verilir ve burada $t=0$ için x_1 ve y_1 sırasıyla x ve y e indirgenir.

$t=0$ iken $x_1=x$ ve $y_1=y$ olduğundan dolayı (1.5.3) deki eşitliklerin t den bağımsız olan ilk ikisi, çözümü

$$u(x_1,y_1)=sabit=u(x,y) \tag{1.5.4}$$

şeklinde yazılabilen bir diferansiyel denklem formuna girer. Bu da (x,y) noktasına karşılık gelen yörünge denklemidir.

$u(x_1,y_1)=c$ eşitliğini değişkenlerden birine göre çözdüğümüzde, örneğin $x_1=w(y_1,c)$ elde edip η de yerine koyduğumuzda, elde edilen diferansiyel denklem

$$\frac{dy_1}{\eta[w(y_1,c),y_1]}=dt$$

şeklindedir. Son olarak x_1 ve y_1 e bağı c değeri yerine konulduğunda çözüm,

$$v(x_1,y_1)-t=sbt.=v(x,y) \tag{1.5.5}$$

formuna girer.

Sonuçta (1.5.2) ve (1.5.3) in çözümü olarak x_1 , y_1 değişkenlerinin belirlendiği ve $t=0$ için x ve y ye indirgenen denklem sistemi,

$$\begin{cases} u(x_1,y_1)=u(x,y) \\ v(x_1,y_1)=v(x,y)+t \end{cases} \tag{1.5.6}$$

şeklinde elde edilir.

Burada t nin bütün değerlerine karşılık gelen tüm (1.5.6) dönüşümleri, Konu 1.2 de tanımlanan bir parametreli Lie grubu yapısı oluşturur. Bu grup (ister (1.5.6) formunda olsun, ister x_1 ve y_1 değişkenlerine göre çözülmüş olsun) Lie operatörü tarafından üretilen dönüşüm grubu olarak adlandırılır.

1.6. Lie Operatöründen Dönüşüm Grubunun Bulunmasında İkinci Yol

Bir parametreli Lie grubunun sonlu dönüşümleri aşağıda ele alındığı şekilde, herhangi bir integral alma işlemi yapılmaksızın da elde edilebilir.

$f(x,y)$ fonksiyonunun analitik olduğu kabul edilirse, $f(x_1,y_1)$ t ye bağlı olduğundan, bu fonksiyon t parametresinin kuvvetlerinde Maclaurin serisine açılabilir:

$$f_1 = f + \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right)_0 \frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{1.6.1}$$

burada,

$$f = f(x,y), \quad f_1 = f(x_1,y_1) \tag{1.6.2}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\xi_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \qquad \eta_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t}, \qquad U_1 f_1 = \xi_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} \tag{1.6.3}$$

ve

$$(\xi_1)_0 = \xi, \qquad (\eta_1)_0 = \eta, \qquad (U_1 f_1)_0 = Uf \tag{1.6.4}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = U_1 f_1 \qquad \text{ve} \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_0 = Uf \tag{1.6.5}$$

dir. Devam edilirse,

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} U_1 f_1 = U_1 U_1 f_1 \equiv U_1^{\,2} f_1 \tag{1.6.6}$$

olur. Bu nedenle,

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\right)_0 = UUf = U^2 f \tag{1.6.7}$$

elde edilir. Aynı şekilde,

$$\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial t^3}\right)_0 = UUUf = U^3 f \tag{1.6.8}$$

işlem devam edecektir. Sonuç olarak

$$f_1 = f + Uft + U^2 f \frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{1.6.9}$$

ifadesine ulaşılır.

Bu son ifadede f yerine sadece x ve y değişkenleri konulduğunda, grubun sonlu dönüşümleri,

$$\begin{cases} x_1 = e^{tU} x = x + Uxt + U^2 x \dfrac{t^2}{2!} + \cdots \\ y_1 = e^{tU} y = y + Uyt + U^2 y \dfrac{t^2}{2!} + \cdots \end{cases} \tag{1.6.10}$$

elde edilir.

1.7. İnvaryantlar

Bir parametreli grubun dönüşümleri $f(x, y)$ fonksiyonu değişmez bırakıyorsa, bu fonksiyona grubun bir invaryantı (veya grup altında invaryant fonksiyon) denir.

Teorem: $f(x, y)$ nin bir parametreli grup altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul $Uf = 0$ olmasıdır.

Konu 1.6 da

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = Uft + U^2 f \frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{1.7.1}$$

olduğunu gördük. Burada t parametresinin bütün değerlerine karşılık x, y değerlerinin x_1 ve y_1 değerlerine dönüştüğü bir parametreli dönüşüm grubunda, bütün x, y değerleri için $f(x_1, y_1) = f(x, y)$ olması için, (1.7.1) eşitliğinin sağ tarafındaki katsayıların sıfır olması gerek ve yeterdir. Özellikle,

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1.7.2}$$

olması gerektir.

İlave olarak, $U^2 f = UUf$, $U^3 = UU^2 f$, … olduğundan, hemen söyleyebiliriz ki, tüm x, y ve t değerleri için (1.7.2) ifadesi $f(x_1, y_1) = f(x, y)$ olması için yeterdir.

İnvaryant fonksiyonu belirlemek için,

$$Uf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1.7.3}$$

diferansiyel denklemini çözmek gereklidir. Bu denkleme karşılık gelen adi diferansiyel denklem sistemi,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{df}{0} \tag{1.7.4}$$

olup, $f = sabit$ denklemin bir çözümüdür. Bunun yanında, eğer $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ denkleminin çözümü $u(x, y) = sabit$ şeklinde ise (1.7.3) ün çözümü Lagrange metodu ile

$$f = F(u) \tag{1.7.5}$$

olur.

1.8. Yörüngeler, İnvaryant Noktalar Ve İnvaryant Eğriler

Konu 1.5 te görüldüğü gibi, bir parametreli dönüşüm grubuna ait yörüngelerin diferansiyel denklemi, grubun sonsuz küçük dönüşümünden kolayca elde ediliyordu. Yani x ve y değişkenleri ile denklem,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} \text{ veya } \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \tag{1.8.1}$$

şeklindedir. Bu denklemin genel çözümü olan $u(x, y) = sabit$ dönüşüm grubunun yörüngelerinin denklemidir. Burada $u(x, y)$ dönüşüm grubunun bir invaryantı olduğu için (Konu 1.7), bir yörüngesinin denklemi bir invaryantın bir sabiteye eşitlenmesi ile elde edilir. Üstelik bu özellik bir invaryantın karakteristik özelliğidir. Yani, bir fonksiyonun bir sabiteye eşitlenmesi bir yörüngenin denklemini veriyorsa, bu fonksiyon bir invaryant olmak zorundadır.

Fakat bu, yörünge denkleminin ortaya çıktığı tek form değildir. Bir yörünge dönüşüm grubunun invaryant eğrisi olduğundan, bunun denklemi invaryant olmalıdır. Eğer $f(x, y) = 0$ bir invaryant denklemi ise, $f(x, y) = 0$ eşitliğini sağlayan x, y değerlerinden dönüşüm grubunun dönüşümleri ile elde edilen tüm x_1 ve y_1 değerlerinin de $f(x_1, y_1) = 0$ şartını sağlaması gerekir. Bir önceki konuda,

$$f(x_1, y_1) = f(x, y) + Uft + U^2 f \frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{1.8.2}$$

olduğunu gördük. $f(x, y) = 0$ için bu eşitliğin sağ tarafı t nin bütün değerleri için sıfır ise, bütün katsayıların sıfır olması gerek ve yeterdir. Özellikle,

$$f(x, y) = 0 \text{ iken}, \quad Uf = 0 \ , \tag{1.8.3}$$

olması gerektir, yani Uf bir çarpan olarak $f(x, y)$ yi içermelidir. Şöyle ki,

$$Uf = \omega(x, y) f(x, y) \text{ ise} \tag{1.8.4}$$

$$U^2 f = UUf = U\omega f + \omega Uf = (U\omega + \omega^2) f \tag{1.8.5}$$

olur; sonuç olarak $U^2 f$ de bir çarpan olarak $f(x, y)$ yi içerir.

Aynı şekilde Uf bir çarpan olarak $f(x, y)$ yi içerdiği sürece (1.7.1) deki bütün katsayıların da bir çarpan olarak $f(x, y)$ yi içerdiği gösterilebilir,

$$U^n f = \theta(x, y) f(x, y) \text{ ise } U^{n+1} f = UU^n f = (U\theta + \theta\omega) f \ . \tag{1.8.6}$$

Bu yüzden, $f(x, y) = 0$ ın bir invaryant denklemi olması için, $f(x, y) = 0$ iken Uf in sıfır olması gerek ve yeter koşuldur.

Tüm x, y değerleri için $Uf = 0$ olması durumunda yukarıdaki koşul sağlanır. Sonuç olarak burada sadece $f(x, y) = 0$ bir yörünge denklemi değil, $f(x, y) = sabit$ de bir yörünge denklemidir.

$Uf = \xi \dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ifadesinin bazen x, y değişkenlerinin belirli değerleri için $\xi = 0$ ve $\eta = 0$ olduğunda sıfır olabildiği belirtilmelidir. Genellikle bu iki denklem değişkenlerin sınırlı sayıdaki değerini belirler. ξ ve η nin anlamını hatırlandığında, değişkenlerin bu değerleri grubun bütün dönüşümleri tarafından değişmez kalır, öyle ki koordinat olarak bu değerleri alan noktalar invaryant noktalardır. Eğer ξ ve η ortak bir $\omega(x, y)$ çarpanı içeriyorsa, $\omega(x, y) = 0$ üzerindeki bütün noktaların invaryant olduğu bir invaryant eğrisidir. Fakat bu invaryant eğriler dönüşüm grubunun yörüngeleri arasına dahil edilmez. Bütün bunların sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem: $f(x, y)$ fonksiyonun yinelenen çarpanlarının olmadığı kabul edilerek, $f(x, y) = 0$ ifadesinin bir parametreli grup altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $f(x, y) = 0$ olmasını sağlayan tüm x, y değerleri için $Uf = 0$ olmasıdır.

Koordinatları $\xi(x,y)=0$ ve $\eta(x,y)=0$ şeklindeki iki denklemi sağlayan noktalar grup altında invaryant noktalardır. Eğer $f(x,y)=0$ iken $\xi(x,y)=0$ ve $\eta(x,y)=0$ ise bu eğri invaryant noktaların birleşimidir. Bu tipteki eğriler grubun yörüngeleri arasına dahil edilmez. Diğer tüm hallerde $f(x,y)=0$ bir yörünge denklemidir.

1.9. İnvaryant Eğriler Ailesi

Bir parametreli dönüşüm grubu her eğriyi yine o eğri ailesinden bir eğriye dönüştürüyorsa, bu eğri ailesine o grup altında invaryant eğri ailesi denir. Burada ele alınacak eğriler denklemleri tek bir parametre veya keyfi bir sabit içeren eğri aileleri olacaktır. Buna göre, $f(x,y)=c$ aile denklemi için

$$f(x_1,y_1)=f\left[\phi(x,y,t),\psi(x,y,t)\right]=\omega(x,y,t)=c' \tag{1.9.2}$$

denklemi keyfi sabitler c', c ve t nin bütün değerleri için aynı eğri ailesinin denklemi oluyorsa,

$$f(x,y)=c \tag{1.9.1}$$

şeklinde yazılan aile denklemine dönüşüm grubu altında invaryanttır denir.

Keyfi sabit içeren bir denklem tarafından belirlenen eğri ailesi, tek bir birinci mertebeden bir diferansiyel denklem tarafından belirlenir ve bu keyfi sabit içeren denklem genel çözümdür. Eğer $f(x,y)=c$ ve $\omega(x,y,t)=c'$ aynı eğri ailesinin denklemleri ise, bu denklemler aynı birinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü olmalıdır. Bu yüzden denklemlerden birinin sağ tarafı diğerinin fonksiyonu olmalıdır, yani;

$$\omega=F(f). \tag{1.9.3}$$

Konu 1.6 daki (1.6.12) bağıntısına bir göz attığımızda,

$$f(x_1,y_1)=f(x,y)+Uft+U^2 f\frac{t^2}{2!}+\cdots \tag{1.9.4}$$

bu açılımdaki her katsayının yalnız ve yalnız $f(x,y)$ nin bir fonksiyonu olması durumunda, t nin bütün değerleri için $f(x_1,y_1)$ ifadesi $f(x,y)$ nin bir fonksiyonu olacaktır. Özellikle

$$Uf = F(f) \tag{1.9.5}$$

alınmalıdır.

Eğer (1.9.5) doğru ise $U^2 f$ in de f in bir fonksiyonu olacağını gösterelim.

$$U^2 f = UUf = UF(f) \tag{1.9.}$$

$$UF(f) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial F(f)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial F(f)}{\partial y} \tag{1.9.7}$$

$$UF(f) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{dF(f)}{df}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{dF(f)}{df}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.9.8}$$

$$UF(f) = \frac{dF(f)}{df}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{1.9.9}$$

$$UF(f) = \frac{dF(f)}{df}Uf \text{ olur ve (13) den} \tag{1.9.10}$$

$$U^2 f = UF(f) = \frac{dF(f)}{df}F(f) \tag{1.9.11}$$

elde ederiz.

Aynı şekilde bu açılımdaki her katsayının f nin bir fonksiyonu olduğu görülür, şöyle ki;

$U^n f = \Phi(f)$ olarak alındığında,

$$U^{n+1} f = UU^n f = U\Phi(f) = \frac{d\Phi(f)}{df}F(f). \tag{1.9.12}$$

Sonuç olarak (1.9.5), $f(x,y) = c$ eğri ailesinin invaryant olması için gerek ve yeter koşuldur.

Özel bir durum olarak, eğer x, y değerlerinin tümü için $Uf = 0$ oluyorsa, $f(x,y) = c$ her biri invaryant olan yörüngelerinin bir ailesidir, bu yüzden aile de invaryanttır. Bu özel aile, $\eta dx - \xi dy = 0$ diferansiyel denklemi ile ifade edilir.

Verilen bir Lie operatörü ile bu operatörün ürettiği dönüşüm grubu altında invaryant tüm eğri ailelerini bulma problemi Konu 2.6 da başka bir formda ele alınacaktır. Böyle ailelerin genel tipi, $f(x,y)$ fonksiyonunun (1.9.5) i sağlama

zorunluluğuna bakılarak elde edilebilir. Burada $F(f)$ ifadesi f in fonksiyonudur. Zaten $F(f)$, aşağıdan da anlaşılabileceği gibi, f fonksiyonunun uygun bir fonksiyonu olarak alınabilir.

$f(x,y)=c$ eğri ailesi kendisine denk olarak $\Phi[f(x,y)]=sabit$ şeklinde yazılabilir ve $\Phi(f)$ burada f fonksiyonunun holomorfik bir fonksiyonudur. Şimdi bu fonksiyona (1.9.5) i uygulayalım:

$$U\Phi(f)=\frac{d\Phi}{df}Uf=\frac{d\Phi}{df}F(f) \tag{1.9.13}$$

olur.

$$\Omega(f)=\frac{d\Phi}{df}F(f) \tag{1.9.14}$$

yazdığımızda aradığımız fonksiyon,

$$\Phi(f)=\int\frac{\Omega(f)}{F(f)}df \tag{1.9.15}$$

olacaktır. Yörüngeler bu işleme dahil edilmediğinden, $F(f)\neq 0$ dır. Sonuç olarak Φ bir integral ile elde edilebilir, şöyle ki; invaryant eğri ailesinin denklemi $\Phi[f(x,y)]=sabit$ şeklinde yazıldığı zaman, (1.9.5) in sağ tarafı istenen $\Omega(f)$ formunda olacaktır.

1.10. Değişkenlerin Değiştirilmesi

Bir parametreli dönüşüm grubunun sonlu dönüşümlerinin formu, üzerinde işlemleri gerçekleştirdiğimiz değişkenlerin seçimine bağlıdır.

Dik koordinat sisteminde dönme hareketinin bir parametreli grubuna ait sonlu dönüşümler,

$$x_1=x\cos a-y\sin a,\quad y_1=x\sin a+y\cos a \tag{1.10.1}$$

şeklinde iken, polar koordinatlarda işlem yapıldığında durum

$$\rho_1=\rho,\qquad \theta_1=\theta+a \tag{1.10.2}$$

şeklini alır ve bu yapı olarak $x_1=x$, $y_1=y+a$ öteleme dönüşümüne özdeştir.

Bir parametreli grubun

$$x_1 = \phi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a) \tag{1.10.3}$$

şeklindeki sonlu dönüşümlerinin yapısı üzerinde,

$$\boldsymbol{x} = F(x, y), \quad \boldsymbol{y} = \Phi(x, y) \tag{1.10.4}$$

ve aynı şekilde

$$\boldsymbol{x}_1 = F(x_1, y_1), \quad \boldsymbol{y}_1 = \Phi(x_1, y_1) \tag{1.10.5}$$

değişken dönüşümünü yapmak için x, y, x_1, y_1 değişkenleri (1.10.4), (1.10.5), (1.10.3) deki altı bağıntıdan yok edilerek, elde edilen iki bağıntı $\boldsymbol{x}_1$ ve $\boldsymbol{y}_1$ için çözülür. $x_1 = x\cos a - y\sin a, \quad y_1 = x\sin a + y\cos a$ dönüşümünde değişken değiştirme formülü ters form olan

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta \tag{1.10.6}$$

$$x_1 = \rho_1\cos\theta_1, \qquad y_1 = \rho_1\sin\theta_1 \tag{1.10.7}$$

şeklinde seçilecektir. Bu yeni değişkenleri dönüşümde yerine koyduğumuzda

$$x_1 = \rho\cos\theta\cos a - \rho\sin\theta\sin a, \qquad y_1 = \rho\cos\theta\sin a + \rho\sin\theta\cos a \tag{1.10.8}$$

$$\rho_1\cos\theta_1 = \rho\cos(\theta + a), \qquad \rho_1\sin\theta_1 = \rho\sin(\theta + a) \tag{1.10.9}$$

elde ederiz. Buradan ρ_1 ve θ_1

$$\rho_1 = \rho, \qquad \theta_1 = \theta + a \tag{1.10.10}$$

şeklinde elde edilir.

Sonsuz küçük dönüşümün yeni formu aşağıda bulunmuştur.

$$\xi(x, y) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a}\right)_{a_0} \tag{1.10.11}$$

olduğundan,

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial a}\right)_{a_0} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}\left(\frac{\partial x_1}{\partial a}\right)_{a_0} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}\left(\frac{\partial y_1}{\partial a}\right)_{a_0} = \xi\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} \tag{1.10.12}$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = U\boldsymbol{x} \tag{1.10.13}$$

yazılabilir. Aynı şekilde $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = U\boldsymbol{y}$ olur. Yeni grup operatörü,

$$\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} + U\boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \tag{1.10.14}$$

şeklinde yazılır. Burada (1.10.4) den yararlanılarak, $U\boldsymbol{x}$ ve $U\boldsymbol{y}$ ifadeleri $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ terimleri ile ifade edilmiştir.

(1.10.4) deki formüle göre yeni değişkenleri aşağıdaki şekilde seçelim,

$$\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \eta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{1.10.15}$$

Bu durumda $U = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ şeklindeki grup operatörü ile,

$$\boldsymbol{\xi} = U\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{yx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \tag{1.10.16}$$

$$\boldsymbol{\eta} = U\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\dfrac{y^2}{x^2}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} + \frac{1}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = 1 \tag{1.10.16}$$

elde edilir ve

$$\boldsymbol{U}f = \xi\frac{\partial f}{\partial \rho} + \eta\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{1.10.17}$$

formu $\boldsymbol{U}f = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ şeklini alır.

1.11. Kanonik Form Ve Değişkenler

Bir parametreli Lie grubunun operatörünü istenen bir yapıya indirgeyen değişken dönüşümünü bulmak teorik olarak her zaman mümkündür. Bu amaçla, operatörü

$$\boldsymbol{U}f = \boldsymbol{\xi}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{\eta}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.11.1}$$

şeklindeki forma sokmak için, aşağıdaki denklemlerin bağımsız çözümlerinin uygun çifti, yeni $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ değişkenleri olarak alınabilir.

$$\begin{cases} U\boldsymbol{x} = \xi(x,y)\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ U\boldsymbol{y} = \xi(x,y)\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{cases} \tag{1.11.2}$$

Özellikle, operatörü y ekseni doğrultusundaki ötelemelerden birine indirgemek için, yani operatör $U = \frac{\partial}{\partial y}$ formunu aldığında, integrallenecek denklemler,

$$\begin{cases} \xi \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \\ \xi \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \end{cases} \tag{1.11.3}$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemlerden ilki Konu 1.7 da (1.7.3) formülüdür ki, burada x bir parametreli gurubun $u(x, y)$ şeklindeki uygun bir invaryantı olarak alınabilir.

İkinci denklemi çözmek için, Konu 1.5 deki (1.5.3) formülünde olduğu gibi,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy}{1} \tag{1.11.4}$$

adi diferansiyel denklem sistemi kullanılarak Lagrange metodu uygulanır. Burada $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ nin çözümü olan $u(x, y) = sabit$ kullanılarak, yukarıdaki denklemden y elde edilebilir.

$U = \frac{\partial}{\partial y}$ formuna sahip Lie operatörüne, kanonik formdaki operatör ve operatörü bu forma indirgeyen değişkenlere de kanonik değişkenler denir. Bu yukarıdaki sonuç şöyle ifade edilebilir: Her Lie operatörü $U = \frac{\partial}{\partial y}$ şeklindeki kanonik forma indirgenebilir. Kanonik değişkenleri bulmak için,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} \tag{1.11.5}$$

birinci dereceden diferansiyel denklemi çözmek ve bu çözüm yardımı ile (1.11.3) ifadesindeki ikinci denklemi çözmek gerekir.

1.12. İkiden Fazla Değişken İçeren Bir Parametreli Dönüşüm Grupları

Bu bölümde ikiden fazla değişken içeren bir-parametreli gruplar ele alınmaktadır. Sonlu dönüşümleri üç değişken içeren gruplar ile n değişken içerenler aynı özellikleri gösterir. Sonlu dönüşümleri

$$\phi(x, y, z, a), \quad \psi(x, y, z, a), \quad \chi(x, y, z, a) \tag{1.12.1}$$

şeklinde olan bir parametreli gruplar Konu 1.2 deki özelliklere sahip olması koşulu ile bir Lie grubu yapısı oluşturacaktır. Burada ϕ, ψ, χ fonksiyonları x, y, z değişkenlerinin ve a parametresnin analitik, bağımsız, reel fonksiyonları olarak kabul edilir:

Bu grubun opertörü

$$Uf = \xi(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + \varsigma(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.12.2}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\xi \equiv \frac{\partial x}{\partial a} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a_0}, \qquad \eta \equiv \frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a_0}, \qquad \varsigma \equiv \frac{\partial z}{\partial a} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial a}\right)_{a_0} \tag{1.12.3}$$

şeklindedir. Eğer değişken sayısı n ise durum,

$$U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{1.12.4}$$

şeklinde olacaktır.

Grubun sonlu dönüşümleri grup operatöründen,

$$\begin{cases} x_1 = x + Uxt + U^2 x\dfrac{t^2}{2!} + \cdots \\ y_1 = y + Uyt + U^2 y\dfrac{t^2}{2!} + \cdots \\ z_1 = z + Uzt + U^2 z\dfrac{t^2}{2!} + \cdots \end{cases} \tag{1.12.5}$$

şeklinde parametrenin kuvvet serileri biçiminde veya,

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1, z_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1, z_1)} = \frac{dz_1}{\varsigma(x_1, y_1, z_1)} = \frac{dt}{1} \tag{1.12.6}$$

şeklindeki diferansiyel denklemin çözümünden elde edilir.

Eğer $u_1(x_1, y_1, z_1) = sabit$ ve $u_2(x_1, y_1, z_1) = sabit$ ilk iki denklemin çözümü (t yi içermeyen) ve $v(x_1, y_1, z_1) - t = sabit$ sistemin diğer ikisinin bağımsız çözümü ise,

$$\begin{cases} u_1(x_1, y_1, z_1) = u_1(x, y, z) \\ u_2(x_1, y_1, z_1) = u_2(x, y, z) \\ v_1(x_1, y_1, z_1) = v_1(x, y, z) + t \end{cases} \tag{1.12.7}$$

grubun sonlu dönüşümlerini belirler.

Eğer değişken sayısı n ise durum, sonlu dönüşümlerin seri açılım formu tamamen aynıdır. İkinci formu elde etmek için kullanılan diferansiyel denklem sistemi,

$$\frac{dx_{1'}}{\xi_{1'}} = \frac{dx_{2'}}{\xi_{2'}} = \cdots = \frac{dx_{n'}}{\xi_{n'}} = \frac{dt}{1} \tag{1.12.8}$$

şeklinde olup çözümleri,

$$\begin{cases} u_1(x_{1'}, x_{2'}, \cdots, x_{n'}) = u_1(x_1, x_2 \cdots, x_n) \\ \cdots \\ u_{n-1}(x_{1'}, x_{2'}, \cdots, x_{n'}) = u_{n-1}(x_1, x_2 \cdots, x_n) \\ v(x_{1'}, x_{2'}, \cdots x_{n'}) = v(x_1, x_2, \cdots x_n) + t \end{cases} \tag{1.12.9}$$

formunda olacaktır.

Üç bağımsız değişkeni içeren bu denklemin iki bağımsız çözümü vardır. Bu yüzden üç değişkenli bir-parametreli grubun iki bağımsız invaryantı vardır. $u_1(x, y, z)$ ve $u_2(x, y, z)$ adı geçen invaryantlar olduğundan, grubun bütün invaryantları u_1 ve u_2 nin bir fonksiyonudur.

Koordinatları,

$$\xi(x, y, z) = 0, \qquad \eta(x, y, z) = 0, \qquad \varsigma(x, y, z) = 0 \tag{1.12.10}$$

eşitliklerini sağlayan noktalar bir parametreli dönüşüm grubu altında invaryant noktalardır. Genellikle, bu üç fonksiyonun bağımsız olması durumunda, bu invaryant noktalar sonlu sayıdadır. Fakat eğer sadece iki fonksiyon bağımsız ise, iki bağımsız denklem üzerindeki her noktanın invaryant olduğu bir eğrinin denklemleri olacaktır. Bir bağımsız denklem olması durumunda, bu üzerindeki her noktanın invaryant olduğu bir yüzey denklemidir.

Yörüngelerin denklemi aşağıdaki şekillerde elde edilir:

1. Grubun dönüşümlerinden a parametresi yok edilerek,
2. Aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi çözülerek,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\varsigma}. \tag{1.12.12}$$

Eğer değişken sayısı n ise, grubun her bir invaryantı $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ şeklindeki $n-1$ bağımsız fonksiyondan birinin fonksiyonudur.

Sonuç olarak, u_1 ve u_2 dönüşüm grubunun iki bağımsız invaryantı ise $u_1 = sabit$ ve $u_2 = sabit$ yörüngelerinin denklemleridir.

$u_1 = sabit$ ve $u_2 = sabit$ yüzeylerinin her biri invaryanttır, çünkü bu yüzeyler yörünge denklemlerindeki sabitelerden birini sabitleyip, diğerinin bunun üzerindeki bütün değerleri alması sağlanarak oluşturulur.

Eğer değişken sayısı n ise, yörüngelerin diferansiyel denklemi

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n} \tag{1.12.13}$$

olup, bunun sonlu çözümleri $u_1 = sabit, u_2 = sabit, \cdots, u_{n-1} = sabit$ şeklindedir. Burada $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$ bağımsız invaryantlardır.

Eğer f fonksiyonunun kendini tekrarlayan çarpanlarının olmaması koşulu ile

$$f = 0 \text{ iken } Uf = 0 \tag{1.12.14}$$

oluyorsa, $f(x, y, z) = 0$ denklemi veya bunun temsil ettiği yüzey invaryanttır.(Eğer Uf, $f = 0$ iken $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \varsigma = 0$ olmasından dolayı sıfır oluyorsa, yüzey üzerindeki bütün noktalar invaryanttır.)

Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonlarının ortak bir çarpan içermeyen bağımsız fonksiyonlar olması ve tekrarlayan çarpanlarının olmaması şartıyla,

$$f_1 = 0 \text{ ve } f_2 = 0 \text{ iken } Uf_1 = 0 \text{ ve } Uf_2 = 0 \tag{1.12.15}$$

oluyorsa, $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ eğrileri invaryant eğirlerdir. Bu son koşul bize

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1.12.16}$$

matrisindeki 2x2 lik determinantların hiçbirinin, tüm x, y, z değerleri için sıfır olmadığını garanti etmektedir.

Bu teoremin üç boyutta bir eğri için kanıtlanmasında kullanılan argüman mevcut $f(x,y,z)=0$ yüzeyindeki durumdan farklıdır. (ikinci durumda, iki boyutta bir eğri için Konu 1.8 uygulanır)

Formül (1.12.9) kullanılarak yazılan,

$$f_1(x_1,y_1,z_1)=f_1(x,y,z)+Uf_1t+U^2f_1\frac{t^2}{2!}+\cdots, \tag{1.12.17}$$

$$f_2(x_1,y_1,z_1)=f_2(x,y,z)+Uf_2t+U^2f_2\frac{t^2}{2!}+\cdots \tag{1.12.18}$$

için gereklilik koşulu daha önce görüldü.

Eğer, t parametresinin bütün değerleri için $f_1(x,y,z)$ ve $f_2(x,y,z)$ fonksiyonlarının sıfır olduğu her durumda $f_1(x_1,y_1,z_1)$ ve $f_2(x_1,y_1,z_1)$ de sıfırsa, $f_1=0$ ve $f_2=0$ için $Uf_1=0$ ve $Uf_2=0$ olması gereklidir.

$$Uf_1=\xi\frac{\partial f_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial f_1}{\partial y}+\varsigma\frac{\partial f_1}{\partial z}=0 \tag{1.12.19}$$

$$Uf_2=\xi\frac{\partial f_2}{\partial x}+\eta\frac{\partial f_2}{\partial y}+\varsigma\frac{\partial f_2}{\partial z}=0 \tag{1.12.20}$$

olduğu için $f_1=0$ ve $f_2=0$ eğrisi boyunca ξ,η,ς ifadelerinin tümü her bir (x,y,z) noktasında bu eğrinin tanjantının doğrultu kosinüslerine orantılıdır, yani bu eğri (x,y,z) noktasından geçen yörüngeleridir. Bu sebepten bunun yeterlilik koşulu olduğu hemen ortaya çıkar.

Eğer $f_1=0$ ve $f_2=0$ için $Uf_1=0$ ve $Uf_2=0$ ise $f_1=0$ ve $f_2=0$ yüzeyleri bir birlerinden bağımsız olarak invaryanttır ve bunların kesişimleri de invaryanttır. Yukarıda incelenen durumla birlikte, böyle yüzeylerin özelliğine bakılmaksızın, (1.12.15) invaryant eğri için koşuldur.

Değişkenlerin

$$\boldsymbol{x}=F(x,y,z),\ \boldsymbol{y}=\Phi(x,y,z),\ \boldsymbol{z}=\Psi(x,y,z) \tag{1.12.21}$$

şeklinde değiştirilmesi operatörün

$$\boldsymbol{U}=U\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}+U\boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{y}}+U\boldsymbol{z}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{z}} \tag{1.12.22}$$

formunu almasına neden olur. Burada

$$Ux = \xi \frac{\partial x}{\partial x} + \eta \frac{\partial x}{\partial y} + \varsigma \frac{\partial x}{\partial z} = \xi(x, y, z) \tag{1.12.23}$$

$$Uy = \xi \frac{\partial y}{\partial x} + \eta \frac{\partial y}{\partial y} + \varsigma \frac{\partial y}{\partial z} = \eta(x, y, z) \tag{1.12.24}$$

$$Uz = \xi \frac{\partial z}{\partial x} + \eta \frac{\partial z}{\partial y} + \varsigma \frac{\partial z}{\partial z} = \zeta(x, y, z) \tag{1.12.25}$$

şeklindedir.

Eğer $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\varsigma = 1$ ise, grup operatörüne kanonik formdaki operatör denir. Eğer yörüngelerin denklemleri biliniyorsa, kanonik değişkenler tek bir integral ile bulunabilir.

II. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2. 1. İntegrasyon Çarpanı

Konu 1.9 da $\phi(x, y) = sbt.$ denklemi, operatörü

$$U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.1.1}$$

şeklinde olan bir parametreli grup altında bir invaryant eğriler ailesi ise,

$$U\phi = F(\phi) \tag{2.1.2}$$

olduğunu gördük. Bundan başka Konu 1.9 da, eğer eğriler ailesi dönüşüm grubunun yörüngeleri değilse, aile denklemi (2.1.2) ün sağ tarafına ϕ nin herhangi istenilen fonksiyonu gelecek şekilde seçilebileceği ayrıca gösterilmişti. Özellikle bu denklemin sağ tarafının 1 olarak seçilmesinde bir sakınca yoktur, çünkü belirli $\phi = sabit$ şeklindeki bir tercihle $F(\phi)$ ye ulaşılıyorsa, $\Phi(\phi) = \int \frac{d\phi}{F(\phi)}$ eşitliğini sağlayan $\Phi(\phi) = sabit$ seçiminde de $U\Phi(\phi) = 1$ verecektir.

$$\Phi(\phi) = \int \frac{d\phi}{F(\phi)} \text{ için } U\Phi(\phi) = 1 \tag{2.1.3}$$

olduğunu gösterelim:

$$U\Phi(\phi) = \xi \frac{\partial \Phi(\phi)}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi(\phi)}{\partial y} = \xi \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$U\Phi(\phi) = \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \left(\xi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$U\Phi(\phi) = \frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} U\phi$$

elde ederiz. Burada $\frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} = \frac{d}{d\phi}\int \frac{d\phi}{F(\phi)} = \frac{1}{F(\phi)}$ olur ve (2.1.2) de $U\phi = F(\phi)$ yazıldığından, $U\Phi\phi = \frac{1}{F(\phi)}F(\phi) = 1$ olur.

Teorem: Eğer $Mdx + Ndy = 0$ diferansiyel denkleminin integral eğrileri ailesi dönüşüm grubunun U operatörü tarafından değişmez bırakılıyorsa, $\frac{1}{\xi M + \eta N}$ ifadesi diferansiyel denklemin integrasyon çarpanıdır.

Bunun için

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.1.4}$$

diferansiyel denkleminin,

$$\phi(x, y) = sabit \tag{2.1.5}$$

şeklindeki integral eğrileri ailesinin, operatörü (2.1.1) olan bir parametreli dönüşüm grubu altında invaryant olduğunu kabul edelim ve grubun yörüngeleri, adı geçen integral eğrileri olmasın. ϕ öyle seçilsin ki,

$$U\phi = \xi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\phi}{\partial y} = 1 \tag{2.1.6}$$

olsun. (2.1.5) burada (2.1.4) nin çözümü olduğundan dolayı,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0 \tag{2.1.7}$$

denklemi (2.1.4) ile aynı denklem olmalıdır. Bu yüzden,

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{N} \tag{2.1.8}$$

veya

$$N\frac{\partial\phi}{\partial x} - M\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \tag{2.1.9}$$

olmalıdır.

(2.1.6) ve (2.1.9) denklemlerinden $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ve $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ değerleri

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{M}{\xi M + \eta N}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{N}{\xi M + \eta N} \tag{2.1.10}$$

olarak kolayca bulunur. Buradan, (2.1.11)

$$d\phi = \frac{Mdx + Ndy}{\xi M + \eta N} \tag{2.1.12}$$

elde edilir.

Bu teorem, (2.1.5) deki eğrilerin bir parametreli dönüşüm grubunun yörüngeleri olması durumunda işlevini yitirir. Bu durumda $\xi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ olacaktır, çünkü (2.1.9) ile birlikte $\xi M + \eta N = 0$ olur. Zaten (2.1.4) ifadesinin integral eğrileri olan (2.1.5) eğrileri, Lie operatörü

$$U = \rho(x, y) \cdot N \frac{\partial}{\partial x} - \rho(x, y) \cdot N \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.1.13}$$

şeklinde olan her dönüşüm grubunun yörüngeleri olduğu aşikardır. Burada $\rho(x, y)$ fonksiyonu x ve y nin analitik bir fonksiyonudur. Böyle gruplara aşikar gruplar denir.

2.2. Genişletilmiş Lie operatörü Altında İnvaryant Diferansiyel Denklem

$$x_1 = \phi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y) \tag{2.2.1}$$

şeklindeki nokta dönüşümlerini kullanarak,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy}{\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy} \tag{2.2.2}$$

veya

$$y_1' = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y'} = \chi(x, y, y') \tag{2.2.3}$$

formülünü elde ederiz. Burada $y' = \frac{dy}{dx}$ ve $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$ dir. χ burada sadece x, y, y' nün bir fonksiyonu olduğundan, nokta dönüşümü x, y, y' değişkenlerine bağlı,

$$x_1 = \phi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y), \quad y' = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} y'} = \chi(x, y, y') \tag{2.2.4}$$

şeklindeki dönüşümü de gerektirir . Bu dönüşüme genişletilmiş nokta dönüşümü denir.

Nokta dönüşümlerinin

$$x_1 = \phi(x, y, a), \qquad y_1 = \psi(x, y, a) \tag{2.2.5}$$

şeklindeki bir parametreli dönüşümleri ile başlayarak elde edilen ve bu dönüşüme karşılık gelen,

$$x_1 = \phi(x, y, a),\ y_1 = \psi(x, y, a),\ y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \chi(x, y, y', a) \tag{2.2.6}$$

şeklindeki genişletilmiş dönüşümler de x, y, y' değişkenlerine bağlı bir parametreli grup oluşturur. Çünkü, genişletilmiş dönüşümün ilk iki denklemi tamamen bir nokta dönüşümünün denklemleridir ve üçüncü denklem de bu ikisi tarafından belirlenmektedir, (2.2.5) in zaten grup özelliği olması, (2.2.6) ye de grup özelliğinin varlığını konduracaktır. Bu yüzden (2.2.6) bir parametreli Lie grubu oluşturur. Bu gruba (2.2.5) e karşılık gelen bir kez genişletilmiş grup denir.

Bir kez genişletilmiş grubun genişletilmiş Lie operatörü,

$$U' = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta'(x, y, y')\frac{\partial}{\partial y'} \tag{2.2.7}$$

şeklinde yazılır. Burada $\xi = \dfrac{\delta x}{\delta a}$, $\eta = \dfrac{\delta y}{\delta a}$ ve $\eta' = \dfrac{\delta y'}{\delta a} = \dfrac{\delta}{\delta a}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ dir.

Konu 1.5 de, uygun bir parametre seçimi ile,

$$\xi = \left(\frac{\partial x_1}{\partial a}\right)_{a_0}, \quad \eta = \left(\frac{\partial y_1}{\partial a}\right)_{a_0}$$ ve herhangi bir f fonksiyonu için $\dfrac{\delta f}{\delta a} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial a}\right)_{a_0}$ olduğunu görmüştük. Burada δ yı diferansiyel operatör olarak aldığımızda, δ ile d değişmeli operatörlerdir, şöyle ki;

$$\frac{\delta}{\delta a}(dx) = \left(\frac{\partial}{\partial a} dx_1\right)_{a_0} = \left(d\frac{\partial x_1}{\partial a}\right)_{a_0} = d\xi = d\left(\frac{\delta x}{\delta a}\right) \tag{2.2.8}$$

olur. Bu sebepten dolayı,

$$\eta' = \frac{\delta}{\delta a}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{\delta}{\delta a}(dy)}{dx} - \frac{dy\frac{\delta}{\delta a}(dx)}{(dx)^2} = \frac{d\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d\left(\frac{\delta x}{\delta a}\right)}{dx}$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} \tag{2.2.9}$$

olur.

Şu noktaya önemle dikkat çekilmelidir ki, y' burada $\frac{dy}{dx}$ e eşit iken, η' genellikle $\frac{d\eta}{dx}$ den farklıdır. (2.2.15) ün sağ tarafı açıldığında

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy}{dx} - y'\frac{\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy}{dx} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y' - y'\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y'\right)$$

$$\eta' = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2 \tag{2.2.10}$$

elde ederiz. Burada η', $\frac{\partial\xi}{\partial y} \neq 0$ olduğunda y' nün ikinci dereceden bir polinomu olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi,

$$f(x, y, y') = 0 \tag{2.2.11}$$

şeklinde birinci dereceden bir diferansiyel denklem verilsin. Yukarıdaki (2.2.5) dönüşümü, verilen diferansiyel denklemi (2.2.5) dönüşümünün bir kez genişletilmişi olan (2.2.6) ile dönüştürecektir. Eğer her integral eğrisi (2.2.5) deki her dönüşüm tarafından yine aileden bir eğriye dönüştürüldüyse, (2.2.6) nın integral eğrileri ailesi dönüşüm grubunun U operatörü altında invaryanttır. Bu yüzden (2.2.6) deki her dönüşüm diferansiyel denklemi değişmez bırakacaktır. Bunun için (1.12.14) de olduğu gibi,

$$f(x, y, y') = 0 \qquad \text{için,} \quad Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2.2.12}$$

koşulu yazılabilir.

Teorem. Eğer $f(x, y, y') = 0$ için $Uf = 0$ ise, $f(x, y, y') = 0$ diferansiyel denkleminin integral eğrileri ailesi ve diferansiyel denklemin kendisi dönüşüm grubunun U operatörü altında invaryanttır.

2.3. Bir Diferansiyel Denklemin Verilen Bir Grup Operatörü Altında İnvaryantlığı İçin İkinci Kriter

Burada bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan dönüşüm grubu için koşul ifade eden ikinci bir forma ulaşacağız. Konu 2.1 de, eğer

$$\phi(x, y) = sabit \tag{2.3.1}$$

denklemi,

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.3.2}$$

denkleminin çözümü ise ϕ

$$A\phi = N\frac{\partial \phi}{\partial y} - M\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{2.3.3}$$

kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. İlave olarak, eğer (2.3.1) operatörü U olan bir parametreli grup altında invaryant ise (yörünge olmaksızın), ϕ

$$U\phi = \xi\frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 \tag{2.3.5}$$

şeklinde seçilebilir.

Şimdi U ve A operatörlerinin komitatörünü yazalım,

$$[U, A]f = UAf - AUf = (UN - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} - (UM + A\eta)\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{2.3.6}$$

Komitatörün

$$[U_1, U_2]f = U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f) \tag{2.3.7}$$

özelliğini kullanarak (2.3.3) ve (2.3.5) dan

$$[U, A]\phi = U(A\phi) - A(U\phi) = U(0) - A(1) = 0 \tag{2.3.8}$$

elde ederiz. Buradan sonuç olarak

$$(UN - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} - (UM + A\eta)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{2.3.9}$$

bulunur.

$\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ifadelerinin en az biri sıfırdan farklıdır, çünkü ϕ burada x ve y değişkenlerinden en az birinin bir fonksiyonudur. Bu yüzden (2.3.9) un katsayıları (2.3.3) dekilerle orantılı olmalıdır. Yani,

$$\frac{UN - A\xi}{N} = \frac{UM + A\eta}{M} = \lambda(x, y), \tag{2.3.10}$$

veya

$$UN - A\xi = \lambda N, \qquad UM + A\eta = \lambda M \tag{2.3.11}$$

dir. Bu son elde etiklerimizi (2.3.6) de yerine koyarsak

$$[U, A] f = U(Af) - A(Uf) = \underbrace{(UN - A\xi)}_{\lambda N} \frac{\partial f}{\partial x} - \underbrace{(UM + A\eta)}_{\lambda M} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.3.12}$$

$$[U, A] f = \lambda N \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda M \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda A f \tag{2.3.13}$$

$$[U, A] f = \lambda(x, y) A f . \tag{2.3.14}$$

Bu yüzden (2.3.14) burada (2.3.2) ün integral eğrilerinin U operatörü altında invaryant olması için gerek koşuldur.

Tersine (2.3.14) sağlanıyorsa,

$$[U, A]\phi = UA\phi - AU\phi = \lambda A\phi = 0 \tag{2.3.15}$$

olur ve bunun sebebi (2.3.3) tür. Bu yüzden $AU\phi = 0$ dır.

Sonuç olarak (2.3.3) ün her çözümü ϕ nin bir fonksiyonu olduğundan

$$U\phi = F(\phi) \tag{2.3.16}$$

olur. Bu da (2.3.1) ailesinin U operatörü altında invaryant olma şartıdır (1.9.5).

Teorem: $Mdx + Ndy = 0$ diferansiyel denkleminin U operatörü altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul, $Af = N\frac{\partial f}{\partial x} - M\frac{\partial f}{\partial x}$ olarak alındığında

$$[U, A] f = \lambda(x, y) A f \tag{2.3.17}$$

olmasıdır.

Bu teoremden Konu 2.1 deki teoremin tersine ulaşılır. Eğer $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.3.18}$$

diferansiyel denkleminin integrasyon çarpanı olan

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N} \tag{2.3.19}$$

ifadesinde yer almış iki fonksiyon ise,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{\xi M + \eta N}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{\xi M + \eta N}\right) = 0 \tag{2.3.20}$$

olur. İşlemler yapıldığında,

$$\frac{\xi M \frac{\partial N}{\partial x} - \xi N \frac{\partial M}{\partial x} - MN \frac{\partial \xi}{\partial x} - N^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \eta N \frac{\partial M}{\partial y} + \eta M \frac{\partial N}{\partial y} + M^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + MN \frac{\partial \eta}{\partial y}}{(\xi M + \eta N)^2} = 0$$

burada payın sıfır olması yeterli olduğundan,

$$\xi M \frac{\partial N}{\partial x} - \xi N \frac{\partial M}{\partial x} - MN \frac{\partial \xi}{\partial x} - N^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} - \eta N \frac{\partial M}{\partial y} + \eta M \frac{\partial N}{\partial y} + M^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + MN \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

olur. Şimdi bunu MN ile bölerek tekrar düzenleyelim,

$$\frac{\xi M \frac{\partial N}{\partial x} + \eta M \frac{\partial N}{\partial y} - MN \frac{\partial \xi}{\partial x} + M^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}}{MN} = \frac{\xi N \frac{\partial M}{\partial x} + N^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta N \frac{\partial M}{\partial y} - MN \frac{\partial \eta}{\partial y}}{MN},$$

$$\frac{\xi \frac{\partial N}{\partial x} + \eta \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial \xi}{\partial x} + M \frac{\partial \xi}{\partial y}}{N} = \frac{\xi \frac{\partial M}{\partial x} + \eta \frac{\partial M}{\partial y} + N \frac{\partial \eta}{\partial x} - M \frac{\partial \eta}{\partial y}}{M},$$

$$\frac{UN - A\xi}{N} = \frac{UM + A\eta}{M} \tag{2.3.21}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\mu(x, y)$

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.3.22}$$

diferansiyel denkleminin bir integrasyon çarpanı ve $\xi(x, y)$ ve $\eta(x, y)$

$$\frac{1}{\xi M + \eta N} = \mu \tag{2.3.23}$$

bağıntısını sağlayan değişkenlerin analitik fonksiyonu ise bu diferansiyel denklem U operatörü altında invaryanttır. ξ ve η (2.3.23) koşuluna uyduğundan dolayı, bu fonksiyonlardan biri keyfi olarak seçilip, diğeri buna bağlı olarak tek şekilde belirlenebilir. Bu yüzden birinci dereceden bir diferansiyel denklemin integrasyon

çarpanından yola çıkarak, diferansiyel denklemi değişmez bırakma koşulunu sağlayan sonsuz sayıda grup operatörü bulunabilir.

Böyle grupların genel ifadesinin iki keyfi fonksiyon içerdiği Konu 2.6 da görülecektir. Zaten, bu (2.3.23) formundan da ayrıca görülebilir. Çünkü, μ eğer $\mu\left(Mdx+Ndy\right)=du$ ifadesini veren bir integrasyon çarpanı ise, u nun herhangi bir $F(u)$ fonksiyonu için, $\mu F(u)$ da bir integrasyon çarpanı olacaktır. Bunu (2.3.23) nün sağ tarafına eşitleyip ve $\xi(x,y)$ yi keyfi olarak seçtiğimizde

$$\frac{1}{\xi M+\eta N}=\mu F(u)\Rightarrow \quad \eta=\frac{1}{N\mu F(u)}-\frac{M\xi(x,y)}{N} \tag{2.3.25}$$

bulunur. Buradan,

$$U=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{1}{N\mu F(u)}-\frac{M\xi(x,y)}{N}\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.3.26}$$

elde edilir.

2.4. İki İntegrasyon Çarpanı

Bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan bir grup operatörünün bilinmesi bize bir integrasyon çarpanı verir ve böylece diferansiyel denklemin çözülmesi problemi sadece bir integrale indirgenir. Farklı bir integrasyon çarpanını ortaya çıkaran ikinci bir operatörün araştırılması denklemin çözülmesi problemini daha da basitleştirecektir. Şöyle ki:

μ_1 ve μ_2 farklı iki integrasyon çarpanı olsun.

$$\frac{\partial\left(\mu_1 M\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\mu_1 N\right)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial\left(\mu_2 M\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\mu_2 N\right)}{\partial y}=0 \tag{2.4.1}$$

$$M\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+\mu_1\frac{\partial M}{\partial x}-N\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial N}{\partial y}=0, \qquad M\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial M}{\partial x}-N\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-\mu_2\frac{\partial N}{\partial y}=0$$

$$\mu_1\frac{\partial M}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial N}{\partial y}=N\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-M\frac{\partial\mu_1}{\partial x}, \qquad \mu_2\frac{\partial M}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial N}{\partial y}=N\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-M\frac{\partial\mu_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{\mu_1}\left(N\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{\mu_2}\left(N\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right)$$

eşitliklerinden,

$$\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{\mu_1}\left(N\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mu_2}\left(N\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) \tag{2.4.2}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{1}{\mu_1}\left(N\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right)=\frac{1}{\mu_2}\left(N\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-M\frac{\partial \mu_2}{\partial x}\right) \tag{2.4.3}$$

$$\frac{1}{\mu_1}N\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-\frac{1}{\mu_1}M\frac{\partial \mu_1}{\partial x}=\frac{1}{\mu_2}N\frac{\partial \mu_2}{\partial y}-\frac{1}{\mu_2}M\frac{\partial \mu_2}{\partial x} \tag{2.4.4}$$

$$\frac{1}{\mu_1}N\frac{\partial \mu_1}{\partial y}-\frac{1}{\mu_2}N\frac{\partial \mu_2}{\partial y}=\frac{1}{\mu_1}M\frac{\partial \mu_1}{\partial x}-\frac{1}{\mu_2}M\frac{\partial \mu_2}{\partial x} \tag{2.4.5}$$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial y}}_{\frac{\partial(\ln\mu_1)}{\partial y}}-\underbrace{\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mu_2}{\partial y}}_{\frac{\partial(\ln\mu_2)}{\partial y}}\right)N=\left(\underbrace{\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial x}}_{\frac{\partial(\ln\mu_1)}{\partial x}}-\underbrace{\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mu_2}{\partial x}}_{\frac{\partial(\ln\mu_2)}{\partial y}}\right)M \tag{2.4.6}$$

$$\left(\frac{\partial(\ln\mu_1)}{\partial y}-\frac{\partial(\ln\mu_2)}{\partial y}\right)N=\left(\frac{\partial(\ln\mu_1)}{\partial x}-\frac{\partial(\ln\mu_2)}{\partial x}\right)M \tag{2.4.7}$$

$$\frac{\partial(\ln\mu_1-l\,\mathrm{n}\,\mu_2)}{\partial y}N=\frac{\partial(\ln\mu-\mathrm{n}\,\mu_2)}{\partial x}M \tag{2.4.8}$$

$$N\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)-M\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=0 \tag{2.4.9}$$

elde ederiz. Bu son elde ettiğimiz eşitlikten $\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}$nin

$$Af=N\frac{\partial f}{\partial x}-M\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{2.4.10}$$

denkleminin integrali olduğunu görülür. Ayrıca $\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$ olduğundan $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ de (2.3.3) in bir integralidir, bu yüzden, $\frac{\mu_1}{\mu_2}=sabit$ (2.3.22) ifadesinin bir çözümüdür. Sonuç olarak integrasyon çarpanlarının bilinmesi bize direkt diferansiyel denklemin çözümünü verir.

Bir μ integrasyon çarpanını bilinirken, sonsuz sayıdaki diğerlerinin bulunabildiğini söyleyen teorem için verilen ispatta [μ eğer $\mu(Mdx+Ndy)=du$ ifadesini veren bir integrasyon çarpanı ise, u değişkeninin herhangi bir $F(u)$ fonksiyonu için, $\mu F(u)$ da bir integrasyon çarpanı olacaktır] tüm olası integrasyon çarpanları bulunabilir.

2.5. Bir Diferansiyel Denklemi İnvaryant Bırakan Grup Operatörü İçin Genel İfade

Bir önceki konuda, eğer U_1 ve U_2 (2.3.22) denklemini değişmez bırakan herhangi iki farklı grup operatörü ise,

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{\xi_2M+\eta_2N}{\xi_1M+\eta_1N} \tag{2.5.1}$$

(2.3.22) nin bir çözümü olduğunu gördük. Bu sebepten,

$$\frac{\xi_2M+\eta_2N}{\xi_1M+\eta_1N}=F(\phi) \tag{2.5.2}$$

dir, Burada $\phi(x,y)=sabit$ (2.3.22) nin çözümünün herhangi seçilmiş bir formudur. (2.5.2) yi tekrar düzenleyelim;

$$\frac{\xi_2M+\eta_2N}{\xi_1M+\eta_1N}=F(\phi) \tag{2.5.3}$$

$$\xi_2M+\eta_2N=F(\phi)\left(\xi_1M+\eta_1N\right) \tag{2.5.4}$$

$$\xi_2M-F(\phi)\xi_1M=F(\phi)\eta_1N-\eta_2N \tag{2.5.5}$$

$$\frac{\xi_2-F(\phi)\xi_1}{N}=-\frac{\eta_2-F(\phi)\eta_1}{M} \tag{2.5.6}$$

orantı olarak alındığında,

$$\frac{\xi_2 - F(\phi)\xi_1}{N} = -\frac{\eta_2 - F(\phi)\eta_1}{M} = \rho(x, y) \tag{2.5.7}$$

elde ederiz. Buradan,

$$\xi_2 = F(\phi)\xi_1 + \rho N\,, \quad \eta_2 = F(\phi)\eta_1 - \rho M \tag{2.5.8}$$

bulunur. Burada elde ettiklerimizi U_2 de yerine koyalım.

$$U_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.5.9}$$

$$U_2 = \left(F(\phi)\xi_1 + \rho N\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(F(\phi)\eta_1 - \rho M\right)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.6.10}$$

$$U_2 = F(\phi)\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \rho N \frac{\partial}{\partial x} + F(\phi)\eta_1 \frac{\partial}{\partial y} - \rho M \frac{\partial}{\partial y} \tag{2.5.11}$$

$$U_2 = F(\phi)\xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + F(\phi)\eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \rho M \frac{\partial}{\partial y} - \rho N \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.5.12}$$

$$U_2 = F(\phi)\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) + \rho\left(M \frac{\partial}{\partial y} - N \frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2.5.13}$$

$$U_2 = F(\phi)U_1 + \rho A \tag{2.5.14}$$

Tersine, eğer U_1 diferansiyel denklemi değişmez bırakıyorsa, (2.5.14) ile verilen U_2 için de aynı işlemler geçerlidir ve $F(\phi)$ ve $\rho(x, y)$ nun nasıl seçildiğinin önemi yoktur. Çünkü, (2.3.17) yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left[U_1, A\right] f = \lambda A f \;; \\
&\left[U_2, A\right] f = (F(\phi)U_1 + \rho A, A) f \\
&\qquad = (F(\phi)U_1, A) f + (\rho A, A) f \\
&\qquad = F(\phi)\underbrace{(U_1 A) f}_{\lambda A f} - \underbrace{A F(\phi)}_{0} U_1 f + \rho \underbrace{(AA) f}_{0} - A\rho A f \\
&\qquad = F(\phi)\lambda A f - A\rho A f \\
&\qquad = \underbrace{\left[F(\phi)\lambda - A\rho\right]}_{v(x,y)} A f \\
&\qquad = v(x, y) A f
\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak diferansiyel denklemi değişmez bırakan her grup operatörü (2.5.14) şeklindedir.

$F(\phi)$ bir sabit ise, elde edilen grup U_1 ile aynı integrasyon çarpanını verir.

Eğer $F(\phi)$ sıfıra eşit ise, elde edilen grup aşikar gruptur (Konu 2.1).

2.6. Belirli Bir Grup Operatörü Altında İnvaryant Diferansiyel Denklemler

Genişletilmiş operatörün bir invaryantını keyfi bir sabiteye eşitleyerek elde edilen diferansiyel denklem invaryant diferansiyel denklemdir. Genişletilmiş operatörün invaryantının genel tipi,

$$U'f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{2.6.1}$$

diferansiyel denkleminin iki bağımsız çözümünün keyfi fonksiyonunun alınmasıyla elde edilir. Buna karşılık gelen adi diferansiyel denklem sistemini yazalım,

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = \frac{dy'}{\eta'(x,y,y')} \tag{2.6.2}$$

buradaki ilk iki denklemden

$$u(x,y) = c \tag{2.6.3}$$

elde edilir. İkinci bağımsız çözüm y' nü içermelidir. Bunu da,

$$G(x,y,y') = sabit \tag{2.6.4}$$

şeklinde yazdığımızda, (2.6.1) nın genel çözümü $f(u,u')$ formunda olacaktır. Bunun keyfi bir sabiteye eşitlenmesi invaryant diferansiyel denklemin genel tipini verir. Bu genel ifadenin sıfıra eşitlenmesinde bir sakınca yoktur. Bu durumda invaryant denklemin genel tipi,

$$f(u,u') = 0 \quad \text{veya} \quad u' = F(u) \tag{2.6.5}$$

olur.

2.7. Değişkenlerin Ayrılması

Ötelemeler grubunun $U = \frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant diferansiyel denklemlerin basit formu bize, bilinen bir grup operatörü altında invaryant diferansiyel denklemin çözümü için pratik bir metot olarak, kanonik değişkenlerin tanımlanmasını telkin eder (Konu 1.11). Operatörün kanonik forma indirgenmesi de diferansiyel denklemi

$$\boldsymbol{y}' = \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}} = F(\boldsymbol{x}) \tag{2.7.1}$$

şeklinde değişkenlerin ayrıldığı forma indirger. Çözüm

$$\boldsymbol{y} = \int F(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + c \tag{2.7.2}$$

şeklinde elde edilir. Sonuç için gerekli olan şey, orijinal değişkenlere geri dönmektir.

$U = \frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant diferansiyel denklem,

$$\frac{dy}{F(y)} = dx \tag{2.7.3}$$

formunda olduğundan, altında bir diferansiyel denklemin invaryant olduğu bir $U = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$ operatörünün bu forma indirgenmesi, yine o diferansiyel denklemdeki değişkenlerin ayrılmasını olanaklı kılar.

Yukarıdaki iki dönüşüm de diferansiyel denklemi çok basit hale getirirken, diferansiyel denklemdeki kanonik değişkenlerin gerçek tanımı ve orijinal değişkenleri geri dönüş diğer değişkenlerdeki kadar kolay olmayabilir. Örneğin, diferansiyel denklemi değişmez bırakan ve ξ ifadesinin yalnız x in fonksiyonu olduğu U operatöründe,

$$\boldsymbol{x} = x \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y} = u(x, y) \tag{2.7.4}$$

yeni değişkenlerin tanımlanması, operatörü

$$\boldsymbol{U} = \xi(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{2.7.5}$$

formuna indirger ve diferansiyel denklem değişkenlerin kolaylıkla ayrılabildiği,

$$\xi(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{y}' = F(\boldsymbol{y}) \tag{2.7.6}$$

formunu alır.

Bu değişkenler takımı, özellikle aşağıda iyi bilinen diferansiyel denklem sınıflarında iyi iş görür ve bunların çözülmesinde bildik metotlara ulaşılır:

1) M ve N nin aynı derecede homojen olduğu

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.7.7}$$

homojen denklem, bir

$$U = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7.8}$$

operatörü tarafından değişmez bırakılıyorsa yeni

$$\boldsymbol{x} = x \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y} = \frac{y}{x} \tag{2.8.9}$$

değişkenleri, operatörü

$$\boldsymbol{U}f = \boldsymbol{x}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{2.7.10}$$

formuna indirger ve diferansiyel denklem değişkenlerin ayrılabilir olduğu (2.7.6) formunu alır.

2) $$yf_1(x\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x} + xf_2(xy)dy = 0 \tag{2.8.11}$$

denklemi

$$U = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.7.12}$$

operatörü tarafından değişmez bırakılıyorsa yeni

$$\boldsymbol{x} = x \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y} = xy \tag{2.7.13}$$

değişkenleri, denklemi değişkenlerin ayrılabilir olduğu (2.8.6) formuna indirger.

Benzer biçimde, eğer η sadece y nin bir fonksiyonu ise,

$$\boldsymbol{x} = u(x, y) \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y} = y \tag{2.7.13}$$

şeklinde yeni değişkenlerin tanımlanması operatörü

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{y}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} \tag{2.7.14}$$

formuna indirger. Burada diferansiyel denklem değişkenlerin ayrılabildiği

$$\frac{y'}{\eta(y)} = F(x) \tag{2.7.14}$$

formunu alır.

Daha genel olarak, eğer $\phi(x)$ ve $\psi(y)$ yeni değişkenler olarak alınan iki ayrı kanonik değişken ise, elde edilen diferansiyel denklemin değişkenleri ayrılabilir olacaktır. Belirli durumlarda, böyle formlar bu fonksiyonlar için yeni değişkenlerin tanımlanmasında gerekli çalışmanın basitleştirilmesi için seçilebilir.

Altında belirli bir birinci dereceden diferansiyel denklemin invaryant olduğu bir operatörün bilinmesi, bize bir integrasyon çarpanının (Konu 2.1) ve dönüştürülmüş denklemde, ayrılabilir bir değişkenler takımının bulunmasını olanaklı kılar.

Denklem $\frac{dy}{dx}$ e göre çözüldüğünde veya $Mdx + Ndy = 0$ formunda yazıldığında integrasyon çarpanı hemen yazılabilir.

III. BÖLÜM

İKİ VE DAHA YÜKSEK MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMELER

3.1. İki Kez Genişletilmiş Operatör, n Kez Genişletilmiş Operatör

Konu 2.2 de

$$\frac{dy_1}{dx_1} = y_1' = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} y'}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} y'} = \chi(x, y, y') \tag{3.1.2}$$

elde edilmişti. Aynı şekilde bu

$$\frac{dy_1'}{dx_1} = y_1'' = \frac{\dfrac{\partial \chi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \chi}{\partial y} y' + \dfrac{\partial \chi}{\partial y'} y''}{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} dy'} = \omega(x, y, y', y'') \tag{3.1.3}$$

ifadesini de gerektirir.

Nokta dönüşümleri ile elde edilen ve x, y, y', y'' değişkenlerine bağlı

$$x_1 = \phi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y),$$

$$y_1' = \chi(x, y, y'), \qquad y_1'' = \omega(x, y, y', y'') \tag{3.1.5}$$

dönüşümleri ile elde edilen yeni gruba iki kez genişletilmiş dönüşüm grubu denir.

$$x_1 = \psi(x, y, a) \quad , \quad y_1 = \psi(x, y, a) \tag{3.1.6}$$

şeklindeki bir parametreli grubun sonlu dönüşümlerinden yola çıkarak, buna karşılık gelen

$$x_1 = \phi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a)$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \chi(x, y, y', a), \quad y'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \omega(x, y, y', y'', a) \tag{3.1.7}$$

iki kez genişletilmiş dönüşümlerin x, y, y', y'' değişkenleri ile bir parametreli grup oluşturduğu görülür. Bu yeni grup (3.1.6) e karşılık gelen iki kez genişletilmiş dönüşüm grubu adını alır.

İki kez genişletilmiş dönüşüm grubunun operatörü

$$U'' = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial}{\partial y''} \tag{3.1.8}$$

şeklinde yazılır, burada

$\xi = \frac{\delta x}{\delta a}, \quad \eta = \frac{\delta y}{\delta a}, \quad \eta' = \frac{\delta y'}{\delta a} = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}$ ve η' nü elde etiğimiz yolla

$$\eta'' = \frac{\delta}{\delta a}\left(\frac{dy'}{dx}\right) = \frac{\frac{\delta}{\delta a}(dy')}{dx} - \frac{dy' \frac{\delta}{\delta a}}{dx^2}(dx) = \frac{d\left(\frac{\delta y'}{\delta a}\right)}{dx} - \frac{dy'}{dx}\frac{d\left(\frac{\delta x}{\delta a}\right)}{dx} \tag{3.1.9}$$

$$\eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx} \tag{3.1.10}$$

olarak bulunur..

Aynı şekilde n kez genişletilmiş dönüşüm grubu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$x_1 = \phi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a),$$

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \chi(x, y, y', a), \quad y'' = \frac{dy_1'}{dx_1} = \omega(x, y, y', y'', a), \tag{3.1.11}$$

…

$$y^{(n)} = \frac{dy_1^{(n-1)}}{dx_1} = \theta(x, y, ..., y^{(n)}, a) \tag{3.1.12}$$

ve grubun operatörü,

$$U^{(n)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(k)} \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} + \cdots + \eta^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{3.1.13}$$

olup, burada

$$\eta^{(k)} = \frac{\delta y^{(k)}}{\delta a} = \frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - y^{(k)} \frac{d\xi}{dx} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{3.1.14}$$

dir.

η' ifadesi y' ifadesinin quadratik bir polinomu olmasına rağmen, ifade (3.1.11) in açılımı ile

$$\eta'' = \frac{\partial \eta'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} y' + \left(\frac{\partial \eta'}{\partial y'} - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} y' \right) y'' \tag{3.1.15}$$

η'' ifadesi y'' nün lineer ifadesi olduğu görülür. Aynı şekilde $\eta^{(k)}$ ifadesinin $k > 1$ için, $y^{(k)}$ nın lineer ifadesi olduğu görülür, çünkü

$$\eta^{(k)} = \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial x} + \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y} y' + \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y'} y'' + \cdots + \frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(k-2)}} y^{(k-1)} + \left(\frac{\partial \eta^{(k-1)}}{\partial y^{(k-1)}} - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} y' \right) y^{(k)} \tag{3.1.16}$$

şeklindedir.

3.2. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem

Bir parametreli Lie grubunun $x_1 = \phi(x, y, a)$ ve $y_1 = \psi(x, y, a)$ şeklindeki sonlu dönüşümleri

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{3.2.1}$$

diferansiyel denklemini, bu dönüşüme karşılık gelen (3.1.11) genişletilmiş dönüşümü ile dönüştürecektir. (3.2.1) denkleminin (3.1.8) operatörü altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul,

$$f(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{için} \quad U''f = 0 \tag{3.2.2}$$

olmasıdır [Konu 1.12, (1.12.14)].

Aynı düşünce ile Konu 2.7 de işlendiği gibi , grup operatörü altında invaryant ikinci mertebeden bütün diferansiyel denklemler

$$U''f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} = 0 \tag{3.2.3}$$

denkleminin bağımsız çözümlerinin keyfi bir fonksiyonunu sıfıra eşitleyerek elde edilir [Konu 1.12, (1.12.10)].

(3.2.3) ye karşılık gelen adi diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = \frac{dy'}{\eta'(x, y, y')} = \frac{dy''}{\eta''(x, y, y', y'')} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir. Bu eşitliklerin ilk üçü Konu 2.7 deki (2.7.2) ile aynıdır. Dolayısıyla çözümlerden ikisi, yani $u(x, y) = sbt.$ ve $u'(x, y, y') = sbt.$ bu konudaki metot ile bulunabilir.

y'' değişkenini içermesi gereken $u''(x, y, y', y'') = sbt.$ şeklindeki üçüncü çözümü bulmak için, $\frac{dy''}{dx} = \frac{\eta''}{\xi}$ den y ve y' veya $\frac{dy''}{dy} = \frac{\eta''}{\eta}$ den x ve y' veya $\frac{dy''}{dy'} = \frac{\eta''}{\eta'}$ den x ve y çekilebilir. Bu diferansiyel denklemlerin her biri lineerdir, çünkü η'' ifadesi y'' ifadesine birinci dereceden bağlıdır. Bu lineer denklem iki integral yardımı ile çözülebilir.

Şimdi u ve u' nün bilinmesi durumunda $u''(x, y, y', y'')$ nün bulunması için değişik bir metot uygulayalım: α ve β nın sabit katsayılar olduğu

$$u'(x, y, y') - \alpha u(x, y) = \beta \tag{3.2.5}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. u ve u' bir kez genişletilmiş U' operatörü altında invaryant olduğundan dolayı, (3.2.5) U operatörü altında invaryanttır, yani, bu diferansiyel denklemin integral eğrileri bu grubun sonlu dönüşümleri tarafından kendi aralarında bir birlerine dönüştürülür. α sabit tutulduğunda, β nın her değerine karşılık integral eğrilerinin bir invaryant ailesi karşılık gelir. Aynı şekilde, α yı tekrar sabit tutup β nın ardışık olarak tüm olası değerleri alması sağlandığında (3.2.5) bir aileler ailesi belirler. Bu adı geçen eğriler ve ailelerin hepsi U operatörü altında invaryanttır, çünkü ailelerin her biri aynı β değerine karşılık gelir. Bu (3.2.5) ifadesinin diferansiyellenerek β nın yok edilmesi ile elde edilen, ikinci mertebeden diferansiyel denklemin integral eğrilerinin bir kümesidir; yani

$$\frac{du'}{dx} - \alpha \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{du'}{du} = \frac{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} y' + \frac{\partial u'}{\partial y'} y''}{\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} y'} = \alpha \tag{3.2.6}$$

İntegral eğrileri her (3.1.6) ile kendi aralarında bir birlerine dönüştüğünden, bu denklem U operatörlü grup altında invaryanttır. (3.2.2) ifadesinden dolayı,

$$\frac{du'}{du} = \alpha \quad \text{olduğu her durumda} \quad U''\left(\frac{du'}{du} - \alpha\right) = 0 \tag{3.2.7}$$

olur. Burada α sabit olduğundan $U''\left(\frac{du'}{du}-\alpha\right)=U''\left(\frac{du'}{du}\right)$ olur, yani α dan bağımsızdır. Bu nedenle $U''\left(\frac{du'}{du}\right)$ sıfırdır ve bu da $\frac{du'}{du}$ ifadesini (31.8) in bir invaryantı yapmak için yeterdir [Konu 1.12 (1.12.10)].

u' ifadesi y' nü içerdiğinden (Konu 2.7) $\frac{\partial u'}{\partial y'}\neq 0$ ve $\frac{du'}{du}$ ifadeleri y'' nü içermek zorundadır. Sonuç olarak, $\frac{du'}{du}=sbt.$ (3.2.4) ün üçüncü çözümü olarak kullanılabilir. Bu durumda (3.2.3) nin genel çözümü

$$f\left(u,u',\frac{du'}{du}\right)=0 \quad \text{veya} \quad \frac{du'}{du}=F(u,u') \tag{3.2.8}$$

formunda yazılabilir. Bu operatörü U olan bir parametreli dönüşün grubu altında invaryant ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel formudur.

Teorem: Eğer $f(x,y,y',y'')=0$ denklemi, U operatörü altında invaryant ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem, $u(x,y)$ operatörü U olan bir parametreli grubun herhangi invaryantı ve $u'(x,y,y')$ invaryant birinci mertebeden diferansiyel denklemi ise,

$$\boldsymbol{x}=u(x,y) \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{y}=u'(x,y,y') \tag{3.2.9}$$

şeklinde yeni değişkenlerin tanımlanması, diferansiyel denklemi

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{3.2.10}$$

şeklinde birinci dereceden bir forma indirgeyecektir.

Uygulamada yeni değişkenlerin tanımlanması,

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}=\frac{\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y}y'+\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y'}y''}{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y}y'} \tag{3.2.11}$$

ifadesinin $u=\boldsymbol{x}$, $u'=\boldsymbol{y}$ ve u'' nün fonksiyonu olmasından dolayı etkilidir. Burada u'' terimi $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}$ terimlerine bağlı olarak bulunabilir. Diğer durumda,

$$\boldsymbol{x}=u(x,y), \quad \boldsymbol{y}=u'(x,y,y'), \tag{3.2.12}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y} y' + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial y'} y''}{\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial y} y'} \tag{3.2.13}$$

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{d\boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{x}}$ bağlı olarak y, y', y'' terimlerinin çekilmesi gerekir. Bunlar diferansiyel denklemde yerine konulduğunda x ortadan kaybolur ve elde edilen denklem (3.2.10) formunu alır.

(3.2.10) nın çözümü sonucu elde edilen

$$\phi(u, u', c) = 0 \tag{3.2.14}$$

ifadesi birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. u ve u' invaryantlar olduğundan (3.2.14) de U operatörü altında invaryanttır.

3.3. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkiden Yüksek Mertebeli Diferansiyel Denklem

Konu 3.2 de verilen metot değiştirilmeksizin daha yüksek mertebeli diferansiyel denkleme uygulanabilir. Şöyle ki, n inci mertebeden

$$f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.3.1}$$

şeklindeki bir diferansiyel denklem sadece ve sadece

$$f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \text{ için } U^{(n)} f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.3.2}$$

oluyorsa operatörü U olan bir parametreli grup invaryanttır.

İnvaryant n inci mertebeden bütün diferansiyel denklemler

$$U^{(n)} f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \cdots + \eta^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0 \tag{3.3.3}$$

ifadesinin $n+1$ bağımsız çözümünün sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir.

Bu bağımsız çözümler

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta'} = \frac{dy''}{\eta''} = \cdots = \frac{dy^{(n)}}{\eta^{(n)}} \tag{3.3.4}$$

adi denklem sisteminin çözümünden elde edilebilir.

Konu 3.2 de eğer $u(x, y)$ fonksiyonu operatörü U olan bir parametreli grubun bir invaryantı ve $u'(x, y, y')$ birinci diferansiyel invaryant ise $\frac{du'}{du}$ nın ikinci diferansiyel invaryant olduğu görüldü. Bu yüzden

$$\frac{du'}{du} - \alpha u = \beta \tag{3.3.5}$$

α ve β sabitlerinin tüm değerleri için ikinci mertebeden bir invaryant diferansiyel denklemdir. Bunun integral eğrileri iki sabiteli eğrilerinin invaryant bir ailesini inşa eder. α sabit tutulup β ya bütün değerlerin verilmesi ile elde edilen ikinci mertebeden bir sabiteli diferansiyel denklemlerinin bir sabiteli integral eğrilerine karşılık iki sabiteli eğrilerinin invaryant ailesi vardır. Bunların hepsini üç sabiteli eğriler içinde gruplandırıldığında bunların tümü grup altında invaryanttır, çünkü aileler invaryanttır. Bunun (3.3.5) nın diferansiyellenerek β nın yok edilmesi ile

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du'}{du}\right) - \alpha\frac{du}{dx} = 0 \text{ veya } \frac{d^2u'}{du^2} - \alpha = 0 \tag{3.3.6}$$

şeklinde elde edildiği açıktır.

(3.3.6) nın invaryant olması için (3.3.2) ü sağlaması gerekir yani,

$$\frac{d^2u'}{du^2} - \alpha = 0 \text{ olduğu her durumda } U'''\left(\frac{d^2u'}{du^2} - \alpha\right) = 0 \tag{3.3.7}$$

olmalıdır. Fakat

$$U'''\left(\frac{d^2u'}{du^2} - \alpha\right) = U'''\left(\frac{d^2u'}{du^2}\right) \tag{3.3.8}$$

dir ve bu α dan bağımsızdır. Bu yüzden, eğer (3.3.6) invaryant ise, $U'''\frac{d^2u'}{du^2}$ sıfır olmalıdır yani $\frac{d^2u'}{du^2}$ (3.3.3) ün çözümü olmalıdır. Bu y''' içerdiğinden u, u' ve $\frac{du'}{du}$ den bağımsızdır.

Aynı şekilde adım adım (3.3.3) ün bağımsız çözümlerinin

$$u,\ u',\ \frac{du'}{du},\ \frac{d^2u'}{du^2},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}u'}{du^{n-1}} \tag{3.3.9}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak U operatörü altında invaryant n inci mertebeden diferansiyel denklemin genel tipi

$$\frac{d^{n-1}u'}{du^{n-1}} = F\left(u, u', \frac{du'}{du}, \frac{d^2u'}{du^2}, \cdots, \frac{d^{n-2}u'}{du^{n-2}}\right) \tag{3.3.10}$$

şeklindedir.

IV. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1. Tam Sistem

Teorem 1: Eğer $\phi(x, y, z)$,

$$A_1 f = P_1(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q_1(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + R_1(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.1)$$

$$A_2 f = P_2(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q_2(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + R_2(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.2)$$

şeklindeki bağımsız iki lineer homojen denklemin çözümü ise,

$$\left[A_1, A_2\right] f = \left(A_1 P_2 - A_2 P_1\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(A_1 Q_2 - A_2 Q_1\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(A_1 R_2 - A_2 R_1\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.3)$$

denkleminin de çözümüdür.

$$\left[A_1, A_2\right]\phi = A_1\left(A_2\phi\right) - A_2\left(A_1\phi\right) = 0 \text{ olur, çünkü } A_1\phi = 0 \text{ ve } A_2\phi = 0 \qquad (4.1.4)$$

dır.

Eğer, üç değişkenli $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$, $A_3 f = 0$ şeklindeki üç lineer denklemin, bir sabitten farklı olan ortak bir $\phi(x, y, z)$ çözümü varsa, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ifadeleri

$$A_1\phi = P_1(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_1(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial y} + R_1(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.5)$$

$$A_2\phi = P_2(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_2(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial y} + R_2(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.6)$$

$$A_3\phi = P_3(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_3(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial y} + R_3(x, y, z)\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.7)$$

eşitliklerini sağlar.

$\phi(x, y, z)$ bir sabit olmadığından dolayı $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ifadelenirinin hiçbiri sıfıra eşit değildir. Bu yüzden

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1.8}$$

olur. Buradan çıkan sonuç şudur: Öyle $\sigma_1(x, y, z)$, $\sigma_2(x, y, z)$, $\sigma_3(x, y, z)$ fonksiyonları bulmak mümkündür ki

$$\sigma_1 A_1 f + \sigma_1 A_2 f + \sigma_3 A_3 f \equiv 0 \tag{4.1.9}$$

dir, yani bu üç denklem bağımsız değildir.

Teorem II: Eğer, $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$, $A_3 f = 0$ şeklindeki üç değişkenli üç denklemin ortak bir çözümü varsa, bunlar bağımsız değildir, diğer ifade ile üç değişkenli bağımsız üç lineer homojen kısmi türevli diferansiyel denklemin bir sabiteden farklı ortak bir çözümü yoktur, olamaz.

Teorem I ve II den şu sonuç çıkar: Eğer $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ in ortak bir çözümü varsa

$$\left[A_1, A_2\right] f = \rho_1(x, y, z) A_1 f + \rho_1(x, y, z) A_2 f \tag{4.1.10}$$

olur. Bir birlerine (4.1.10) bağıntısı ile bağlantılı $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ bağımsız denklemler çiftine tam sistem denir.

Teorem III: Eğer, $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ ın ortak bir çözümü varsa, bunlar bir tam sistem oluşturur.

Teorem IV: Eğer, $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ bir tam sistem oluşturuyorsa, bunların ortak bir çözümü vardır.

Teorem IV ü ispatlamak için aşağıdaki iki Lemma yı ispatlamak gerekir.

Lemma I: Eğer, $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ bir tam sistem oluşturuyorsa, bunların bağımsız lineer kombinasyonlarından oluşan herhangi denklem çifti de ayrıca bir tam sistem oluşturur.

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_1 f = \lambda_1(x, y, z) A_1 f + \mu_1(x, y, z) A_2 f = 0 \\ \boldsymbol{A}_2 f = \lambda_2(x, y, z) A_2 f + \mu_2(x, y, z) A_2 f = 0 \end{cases} \tag{4.1.11}$$

denklemleri $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$ olması durumunda bağımsızdır. Buna bağlı olarak $A_1 f$ ve $A_2 f$ ifadeleri (4.1.11) den $\boldsymbol{A}_1 f$ ve $\boldsymbol{A}_2 f$ ifadelerinin lineer bir fonksiyonu olarak bulunabilir.

$A_1 f$ ve $A_2 f$ in bir tam sistem oluşturduğu kabul edildiğinden,

$$[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2] f = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)[A_1, A_2] f + (\boldsymbol{A}_1\lambda_2 - \boldsymbol{A}_2\lambda_1) A_1 f + (\boldsymbol{A}_1\mu_2 - \boldsymbol{A}_2\mu_1) A_1 f \qquad (4.1.11)$$

ifadesinin $A_1 f$ ve $A_2 f$ in bir lineer fonksiyonu olduğu görülür bu nedenle $\boldsymbol{A}_1 f$ ve $\boldsymbol{A}_2 f$ lemmayı ispatlar.

İlave olarak, $A_1 f$ ve $A_2 f$ in herhangi ortak çözümü $\boldsymbol{A}_1 f$ ve $\boldsymbol{A}_2 f$ için de aynı olmalıdır. Bu yüzden iki sisteme denktir denir.

Eğer orijinal sistem, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ kısmi türevlerinden herhangi ikisi için çözülürse, orijinal sisteme denk bir sistem elde edilir. Bu her zaman yapılabilir, çünkü

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{bmatrix} \qquad (4.1.12)$$

matrisindeki üç determinant, $A_1 f$ ve $A_2 f$ bağımsız denklemler olduğundan dolayı, sıfıra eşit değildir. Şimdi bunu yapalım:

$$\left.\begin{aligned} P_1\frac{\partial f}{\partial x} + Q_1\frac{\partial f}{\partial y} + R_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ P_2\frac{\partial f}{\partial x} + Q_2\frac{\partial f}{\partial y} + R_2\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P_1Q_2\frac{\partial f}{\partial x} + Q_1Q_2\frac{\partial f}{\partial y} + Q_2R_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ -P_2Q_1\frac{\partial f}{\partial x} - Q_1Q_2\frac{\partial f}{\partial y} - Q_1R_2\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.13)$$

sisteminden,

$$(P_1Q_2 - P_2Q_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (Q_2R_1 - Q_1R_2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{Q_2R_1 - Q_1R_2}{P_1Q_2 - P_2Q_1}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.15)$$

elde edilir ve aynı yoldan

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{-P_2R_1 - P_1R_2}{P_1Q_2 - P_2Q_1}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.1.16)$$

elde edilir. Burada,

$D = P_1Q_2 - P_2Q \neq 0$ olmak üzere , $\boldsymbol{R}_1 = \dfrac{Q_2R_1 - Q_1R_2}{D}$, $\boldsymbol{R}_2 = \dfrac{-P_2R_1 - P_1R_2}{D}$

yazıldığında denk sistem

$$\boldsymbol{A}_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{R}_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 , \qquad \boldsymbol{A}_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{R}_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{4.1.17}$$

şeklinde yazılır. (4.1.11) ve (4.1.17) ifadelerinden

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{R}_1 \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda_1 A_1 f + \mu_1 A_2 f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{R}_1 \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\lambda_1 P_1 + \mu_1 P_2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\lambda_1 Q_1 + \mu_1 Q_2\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\lambda_1 R_1 + \mu_1 R_2\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{R}_2 \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda_2 A_1 f + \mu_2 A_2 f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{R}_2 \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\lambda_2 P_1 + \mu_2 P_2\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\lambda_2 Q_1 + \mu_2 Q_2\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\lambda_2 R_1 + \mu_2 R_2\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$

yazılır. Buradan elde edilen

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_2 &= 1 \\ \lambda_1 Q_1 + \mu_1 Q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{ve} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda_2 P_1 + \mu_2 P_2 &= 0 \\ \lambda_2 Q_1 + \mu_2 Q_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.1.18}$$

sistemlerinin çözümü ile $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \dfrac{1}{D} \neq 0$ olmak üzere

$$\lambda_1 = -\frac{Q_2}{D}, \;\; \mu_1 = -\frac{Q_1}{D}, \;\; \lambda_2 = -\frac{P_2}{D}, \;\; \mu_2 = -\frac{P_1}{D} \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.1.17) bağımsızdır. Bu aşikardır çünkü, ikincisi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i içermezken ilk denklem $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ den bağımsızdır. İlave olarak

$$\left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\right] f = 0 \tag{4.1.20}$$

olur. Bunun sebebi $\boldsymbol{A}_1 f = 0$ ve $\boldsymbol{A}_2 f = 0$

$$\left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\right] f = \rho_1 \boldsymbol{A}_1 f + \rho_2 \boldsymbol{A}_2 f \tag{4.1.21}$$

şeklinde bir tam sistem oluşturmasıdır. (4.1.17) denklemleri ile $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ifadelerinden bağımsız

$$\left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\right] f = \left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{R}_1\right)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.1.21}$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak (4.1.10) deki ρ_1 ve ρ_2 sıfır olmalıdır ve buradan (4.1.20) elde edilir.

$\rho_1 = \rho_2 = 0$ olan tam sisteme Jacobian tam sistem denir.

Lemma II. Verilen bir tam sisteme denk bir jacobian tam sistem her zaman bulunabilir.

Bu denk jacobian sistemin tek olmadığına dikkat edilmelidir. Çünkü böyle bir sistemle başlayarak, bu denklemlerin sabit çarpanlarla birlikte bağımsız lineer kombinasyonlarının herhangi çifti aynı cinsten başka bir sistemdir.

Bir jacobian tam sistemin bir çözümü olduğunu göstermek kolaydır. $\boldsymbol{A}_1 f = 0$ ve $\boldsymbol{A}_2 f = 0$ ın böyle bir sistem olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\right] f = \boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2 f\right) - \boldsymbol{A}_2\left(\boldsymbol{A}_1 f\right) = 0 \tag{4.1.22}$$

Eğer $u(x, y, z)$ ve $v(x, y, z)$ bu denklemlerden birinin bağımsız iki çözümü olsun. Bu denklemin $\boldsymbol{A}_1 f = 0$ olduğunu kabul edelim. Burada u ve v nin herhangi fonksiyonu bu denklemi sağlayacaktır. Öyle bir $F(u,v)$ fonksiyonu bulunsun ki, bulunan bu fonksiyon $\boldsymbol{A}_2 f = 0$ nın da çözümü olsun, yani

$$\boldsymbol{A}_2 F(u,v) = \frac{\partial F}{\partial u}\boldsymbol{A}_2 u + \frac{\partial F}{\partial v}\boldsymbol{A}_2 v = 0\,. \tag{4.1.23}$$

Şimdi böyle bir fonksiyonun bulunup bulunmadığına bakalım. (4.1.20) de f yerine u ve v koyulsun

$$\boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2 u\right) - \boldsymbol{A}_2\left(\boldsymbol{A}_1 u\right) = 0 \text{ ve } \boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2 v\right) - \boldsymbol{A}_2\left(\boldsymbol{A}_1 v\right) = 0 \tag{4.1.24}$$

olur. Burada $\boldsymbol{A}_1 u = 0$ ve $\boldsymbol{A}_1 v = 0$ olduğundan

$$\boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2 u\right) = 0 \text{ ve } \boldsymbol{A}_1\left(\boldsymbol{A}_2 v\right) = 0 \tag{4.1.25}$$

sonucunu elde ederiz. Sonuç olarak $\boldsymbol{A}_2 u$ ve $\boldsymbol{A}_2 v$ ifadeleri u ve v nin fonksiyonlarıdır, sırasıyla bunlara $\phi(u,v)$ ve $\psi(u,v)$ diyelim. $F(u,v)$ belirlemek için (4.1.23) denklemi

$$\phi(u,v)\frac{\partial F}{\partial u} + \psi(u,v)\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \tag{4.1.26}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü $\boldsymbol{A}_1 f = 0$, $\boldsymbol{A}_2 f = 0$ jacobian sisteminin ve sonuç olarak denk tam sistem $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ in bir çözümüdür. Bu şekilde teorem 4 ispat edilir.

Bunların hepsi n değişkenli homojen lineer denklemlere genişletilebilir. Teorem 1 in ispatı ile aynı olarak, eğer $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$A_1 f = P_{11}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + P_{12}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + P_{1n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$A_2 f = P_{21}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + P_{22}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + P_{2n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

denklemlerinin çözümü ise, ayrıca $[A_1, A_2]f = 0$ denkleminin de çözümüdür.

Eğer n tane denklemin, bir sabitten farklı, ortak bir çözümü varsa bu denklemler bağımsız olamazlar. Katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ . & . & . & . \\ P_{n1} & P_{n2} & & P_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.1.27}$$

sıfır olmalıdır. Bu yüzden

$$\sigma_1 A_1 f + \sigma_2 A_2 f + \cdots + \sigma_n A_n f = 0 \tag{4.1.28}$$

şeklinde bir bağıntı mevcut olmalıdır.

Ortak bir çözüme sahip

$$A_1 f = 0\ ,\quad A_2 f = 0, \ldots ,\quad A_r f = 0 \qquad (2 \le r < n) \tag{4.1.29}$$

r tane bağımsız denklem ile elde edilen

$$[A_i, A_k]f = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, \cdots, r) \tag{4.1.30}$$

şeklindeki bürün denklemler de bu çözüme sahip olacaklardır. Bu denklemlerin hepsi veya bazıları orijinal denklemlerden bağımsız olabilir. Bu işlemler bağımsız denklemler bulunana kadar tekrarlanabilir. Bu işlem toplam denklem sayısı n ye ulaşmadan bitmelidir. Çünkü, bir sabitten farklı ortak bir çözüme sahip olan n değişkenli n tane bağımsız lineer denklem olamaz. Böylece

$$[A_i, A_k]f = \rho_1 A_1 f + \rho_2 A_2 f + \cdots + \rho_s A_s f = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, \cdots, s) \tag{4.1.31}$$

olacak şekilde

$$A_1 f = 0\ ,\quad A_2 f = 0, \ldots ,\quad A_s f = 0 \qquad (r \le s < n) \tag{4.1.32}$$

s denklemli bir sistem elde edilir. Böyle bir sistem bir tam sistem oluşturur. Biz böylece, eğer r tane denklemin ortak bir çözümü varsa, bunlar tarafından belirlenen tam sisteme ait her denklemin bu çözüme sahip olduğunu göstermiş olduk.

n değişkenli s tane böyle bir tam sistemin $n - s$ bağımsız çözümü vardır. Şimdi bunu $n = 5$ ve $s = 3$ için gösterelim:

$$A_1 f = P_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + P_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2} + P_{13}\frac{\partial f}{\partial x_3} + P_{14}\frac{\partial f}{\partial x_4} + P_{15}\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0 \qquad (4.1.33)$$

denkleminin u_1, u_2, u_3, u_4 olacak şekilde dört çözümü vardır. Problem bunların $F(u_1, u_2, u_3, u_4)$ şeklindeki bir fonksiyonunun $A_2 f = 0$ ve $A_3 f = 0$ denklemlerini sağlayıp sağlamadığını göstermektir.

$i = 1,2,3,4$ için u_i ifadesi $A_1 f = 0$ i sağladığından,

$$\left[A_1, A_2\right] f = A_1(A_2 f) - A_2(A_1 f) = 0 \qquad (4.1.34)$$

ifadesinde f yerine u_i konulduğunda, $A_2 u_i$ nin de ayrıca $A_1 f = 0$ in bir çözümü olduğu ortaya çıkar. Bu yüzden $A_2 u_i$ ifadesi u_1, u_2, u_3, u_4 nin bir fonksiyonu olmalıdır buna , $i = 1,2,3,4$ için $\phi_i(u_1, u_2, u_3, u_4)$ diyelim. Eğer F

$$A_2 F = \phi_1\frac{\partial F}{\partial u_1} + \phi_2\frac{\partial F}{\partial u_2} + \phi_3\frac{\partial F}{\partial u_3} + \phi_3\frac{\partial F}{\partial u_4} = 0 \qquad (4.1.35)$$

denkleminin u_1, u_2, u_3, u_4 ü içeren bir çözümü ise, bu $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ ın bir çözümü olacaktır.

Bu denklemin v_1, v_2, v_3 şeklinde üç bağımsız çözümü vardır. Bunların herhangi fonksiyonu $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ ın bir çözümü olacaktır; tersine $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ e ortak her çözüm v_1, v_2, v_3 ün bir fonksiyonu olacaktır. Artık yapılması gereken v_1, v_2, v_3 ün $\Phi(v_1, v_2, v_3)$ şeklindeki herhangi bir fonksiyonunun $A_3 f = 0$ denklemini sağlayıp sağlamadığını göstermektir.

$$\left[A_1, A_3\right] f = A_1(A_3 f) - A_3(A_1 f) = 0,\ \left[A_2, A_3\right] f = A_2(A_3 f) - A_3(A_2 f) = 0 \qquad (4.1.36)$$

denklemlerinde f yerine v_i konulduğunda $A_3 v_i$ nin, $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ denklemlerinin bir çözümü olduğu sonucuna ulaşılır. Bu yüzden $A_3 v_i$ ifadesi v_1, v_2, v_3 nin bir fonksiyonu olmalıdır buna , $i = 1,2,3$ için $\psi_i(v_1, v_2, v_3)$ diyelim. Bu durumda Φ fonksiyonu

$$A_3\Phi = \psi_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + \psi_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + \psi_3\frac{\partial \Phi}{\partial v_3} \qquad (4.1.37)$$

denkleminin herhangi bir çözümü olabilir.

4.2. Tam Sistemin Çözüm Metodu

Aslında $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0$ şeklindeki bir tam sisteme ortak çözüm bulmak için denk Jacobian sisteme geçmek gerekli değildir. Eğer u ve v denklemlerden birinin (bu $A_1 f = 0$ olsun) iki bağımsız çözümü ise $F(u,v)$ fonksiyonu diğerinin çözümüdür, yani

$$A_2 F(u,v) = A_2 u \frac{\partial F}{\partial u} + A_2 v \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \tag{4.2.1}$$

veya

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{A_2 v}{A_2 u} \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \tag{4.2.2}$$

Burada $F(u,v)$ bu denklemi sağlamalıdır, ayrıca $\frac{\partial F}{\partial u}$ ve $\frac{\partial F}{\partial v}$ ifadeleri u ve v nin fonksiyonlarıdır ve $\frac{A_2 v}{A_2 u}$ ifadesi u ve v nin bir fonksiyonu olmalıdır. Sonuç olarak (4.2.2) bu iki değişkene bağlı bir denklemdir ve çözümü için bildiğimiz metotlar uygulanabilir.

4.3. Çözümün İkinci Metodu

Eğer $\phi(x,y,z)$ fonksiyonu $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ tam sisteminin bir çözümü ise

$$A_1 \phi = P_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} + R_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \tag{4.3.1}$$

$$A_2 \phi = P_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + R_2 \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{4.3.2}$$

denklemleri

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} : \frac{\partial \phi}{\partial y} : \frac{\partial \phi}{\partial z} = Q_1 R_2 - Q_2 R_1 : R_1 P_2 - R_2 P_1 : P_1 Q_2 - P_2 Q_2 \tag{4.3.3}$$

orantısını verir.

$\phi(x, y, z) = sbt.$ şeklinde çözümü olan bir tam diferansiyel denklem

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = 0 \tag{4.3.4}$$

şeklinde yazıldığından veya bundan x, y, z yi içeren bir çarpanla ayrıldığından, bu denklem,

$$\left(Q_1R_2 - Q_2R_1\right)dx + \left(R_1P_2 - R_2P_1\right)dy + \left(P_1Q_2 - P_2Q_2\right)dz = 0 \tag{4.3.5}$$

formunu alabilir.

Böylece bir tam sistemin çözümü (4.3.5) tam diferansiyel denkleminin çözümüne indirgenir. Bazen (4.3.5) nin çözümü geçen bölümdeki metottan daha basittir.

Bildik metotların yanı sıra, aşağıdaki Dubois-Rymond metodu tam diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir.

Değişkenlerden biri geçici olarak sabit alınsın, buna z diyelim. Bu aynı zamanda diğer iki değişkenin

$$z = x + ay \qquad (a = sbt.) \tag{4.3.6}$$

şeklinde lineer bir kombinasyonu olsun. Bu bağıntıdan,

$$dz = dx + ady \tag{4.3.7}$$

yazılır. Yukarıdaki tam diferansiyelden ve bu iki denklemden z ve dz yok edildiğinde, sonuç çözümü $\psi(x, y, a) = sbt.$ olan

$$M(x, y, a)dx + N(x, y, a)dy = 0 \tag{4.3.8}$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklemdir. Burada a yerine x, y, z ye değeri konulduğunda tam diferansiyelin çözümü

$$\psi\left(x, y, \frac{z - x}{y}\right) = sbt. \tag{4.3.9}$$

şeklindedir.

Bu metot iki yerine sadece bir adi diferansiyel denklem çözülmesini gerektirir. Fakat uygulamada, teorik olarak daha basit olan bu metot, diğerleri kadar makbul değildir.

4.4. Grup Operatörü altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem

$$Af = P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{4.4.1}$$

şeklindeki birinci mertebeden homojen kısmi diferansiyel denklemin, $\phi_1(x, y, z)$ ve $\phi_2(x, y, z)$ şeklinde iki bağımsız çözümü vardır. Diğer bütün çözümler bu ikisinin fonksiyonu olacaktır.

Yukarıdaki denklem

$$x_1 = \phi(x, y, z), \qquad y_1 = \psi(x, y, z), \qquad z_1 = \chi(x, y, z) \tag{4.4.2}$$

dönüşümü ile dönüştürüldüğünde sonuç,

$$A\phi\frac{\partial f}{\partial x_1} + A\psi\frac{\partial f}{\partial y_1} + A\chi\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \tag{4.4.3}$$

şeklinde yeni denklemdir[Konu 1.12,(1.12.22)]. Burada $A\phi$, $A\psi$, $A\chi$ ifadeleri x_1, y_1, z_1 terimleri ile ifade edilir. Eğer (4.4.3) denklemi (4.4.1) eski değişkenlerdeki ile aynı ise veya bir integrasyon çarpanı ile birbirlerinden farklı ise, (4.4.2) dönüşümünün (4.4.1) diferansiyel denklemini değişmez bıraktığı söylenir. Bu durumda bu dönüşüm $\phi_1(x, y, z)$ ve $\phi_2(x, y, z)$ çözümlerini tekrar çözüme dönüştürmelidir, yani bu çözümler (4.4.2) tarafından değişmez bırakılır veya bu dönüşüm tarafından bunların bir takım fonksiyonlarına dönüştürülür.

Hangi koşul altında (4.4.1) in

$$U = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial x} + \varsigma\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.4.4}$$

şeklindeki Lie operatörü tarafından değişmez bırakıldığını bulalım.

Konu 1.12 de

$$\phi_i(x_1, y_1, z_1) = \phi_i(x, y, z) + U\phi_i\frac{t}{1} + U^2\frac{t^2}{2} + \cdots, \qquad (i = 1, 2) \tag{4.4.5}$$

olduğu gösterildi. Bu ifadenin $\phi_1(x, y, z)$ ve $\phi_2(x, y, z)$ nin bir fonksiyonu olması için

$$U\phi_i = F_i(\phi_1, \phi_2) \qquad (i = 1, 2) \tag{4.4.6}$$

olması gerektir. Bu ayrıca yeter koşuldur. Çünkü

$$U^2\phi_i = UU\phi_i = UF_i(\phi_1, \phi_2) = \frac{\partial F_i}{\partial \phi_1}U\phi_1 + \frac{\partial F_i}{\partial \phi_2}U\phi_2 = F_1\frac{\partial F_i}{\partial \phi_1} + F_2\frac{\partial F_i}{\partial \phi_2} \tag{4.4.7}$$

ifadesi de tekrar ϕ_1 ve ϕ_2 nin bir fonksiyonudur. Aynı şekilde eğer $U^k\phi_i$ ifadesi ϕ_1 ve ϕ_2 nin bir fonksiyonu ise $U^{k+1}\phi_i$ de bunların bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Bu yüzden (4.4.6) çözümleri ϕ_1 ve ϕ_2 olan denklemin grup altında invaryant olması için gerek ve yeter koşuldur.

Bunu diferansiyel denklemin kendi değişkenleri ile ifade edelim. $Af = 0$ denklemi U operatörü altında invaryant olduğu zaman,

$$[U, A]f = (UP - A\xi)\frac{\partial f}{\partial x} + (UQ - A\eta)\frac{\partial f}{\partial y} + (UR - A\zeta)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (4.4.8)$$

lineer denkleminin ϕ_1 ve ϕ_2 şeklinde iki çözümü vardır. Çünkü,

$$[U, A]\phi_i = UA\phi_i - AU\phi_i = U(0) - AF_i(\phi_1, \phi_2) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

(4.4.1) ve (4.4.8) aynı çözümlere sahip olduğundan, bunlar aynı denklem olmak zorundadır. Sonuç olarak $Af = 0$ denklemi U operatörü altında invaryant olduğu zaman

$$[U, A]f = \lambda(x, y, z)Af \qquad (4.4.9)$$

olur.

Tersine, (4.4.9) sağlandığında, (4.4.1) ve (4.4.8) aynı çözümlere sahip olur ve

$$[U, A]\phi_i = UA\phi_i - AU\phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (4.4.10)$$

dir. $A\phi_i = 0$ olduğundan dolayı, $A(U\phi_i) = 0$ olur, bu yüzden $U\phi_i$ (4.4.1) in bir çözümüdür ve ϕ_1 ve ϕ_2 nin bir fonksiyonu olmalıdır. Bu nedenle (4.4.9) U operatörünün $Af = 0$ denklemini değişmez bırakması için gerek ve yeter koşuldur.

(4.4.9) koşulunun aşikar bir sonucu olarak; eğer $Af = 0$ denklemi $U_1, U_2, \cdots U_r$ operatörleri altında invaryant ise $U = a_1U_1 + a_2U_2 + \cdots + a_rU_r$ operatörü altında da invaryanttır.

4.5. Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemin Çözüm Metodu

Eğer $Af = 0$ denklemi U operatörü altında invaryant ise

$$[U, A]f = \lambda Af \tag{4.5.1}$$

olur, yani $Af = 0$ ve $Uf = 0$ bir tam sistem oluşturur. Bu yüzden Konu 4.2 ve 4.3 teki metotlar $Af = 0$ in çözümlerinden birini bulmak için kullanılabilir.

$Af = 0$ ve $Uf = 0$ e ortak çözüm olan $\phi(x, y, z)$ kullanılarak $Af = 0$ in ikinci bir çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$\phi(x, y, z)$ bir sabit olmadığından en az bir değişkeni içermelidir, buna z diyelim. Bunu

$$\boldsymbol{z} = \phi(x, y, z) \tag{4.5.2}$$

şeklinde yeni değişken olarak aldığımızda denklem ve grup

$$\boldsymbol{A}f = \boldsymbol{P}(x, y, \boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{Q}(x, y, \boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{4.5.3}$$

$$\boldsymbol{U}f = \boldsymbol{\xi}(x, y, \boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{\eta}(x, y, \boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{4.5.4}$$

formunu alacaktır, çünkü $A\phi = 0$ ve $U\phi = 0$ dır. Burada $\boldsymbol{P,Q,\xi,\eta}$ ifadeleri içindeki z yerine $\boldsymbol{z} = \phi(x, y, z)$ değişkeninin yerleştirilmesi ile elde edilen ifadelerdir. Burada $\boldsymbol{z}$ bir sabittir, çünkü $\boldsymbol{A}f$, $\boldsymbol{U}f$ ifadelerinin içindeki $\frac{\partial f}{\partial z}$ nin katsayıları sıfırdır. $\boldsymbol{A}f = 0$ ı çözmek için buna karşılık gelen

$$\boldsymbol{Q}dx - \boldsymbol{P}dy = 0 \tag{4.5.5}$$

adi diferansiyel denklemini çözmeliyiz. Bu denklem $\boldsymbol{U}'$ altında invaryanttır. Konu 2.1 ve 2.8 deki metotlar uygulanabilir.

4.6. Jacobi Özdeşliği

Konunun ileri aşaması için bu özdeşliğin ele alınması gereklidir:

Eğer $A_1 f, A_2 f, A_3 f$ herhangi sayıda değişkenli üç homojen kısmi diferansiyel ifade ise,

$$\left[\left[A_1, A_2\right], A_3\right] f + \left[\left[A_2, A_3\right], A_1\right] f + \left[\left[A_3, A_1\right], A_2\right] f = 0 \tag{4.6.1}$$

dir. Aşağıdaki eşitliklerin en sağ tarafları toplandığında (4.6.1) ün sağlandığı görülür.

$$\left[\left[A_1, A_2\right], A_3\right] f = \left[\left(A_1 A_2 f - A_2 A_1 f\right), A_3\right] = A_1 A_2 A_3 f - A_3 A_1 A_2 f - A_2 A_1 A_3 f + A_3 A_2 A_1 f$$

$$\left[\left[A_2, A_3\right], A_1\right] f = \left[\left(A_2 A_3 f - A_3 A_2 f\right), A_1\right] = A_2 A_3 A_1 f - A_1 A_2 A_3 f - A_3 A_2 A_1 f + A_1 A_3 A_2 f$$

$$\left[\left[A_3, A_1\right], A_2\right] f = \left[\left(A_3 A_1 f - A_1 A_3 f\right), A_2\right] = A_3 A_1 A_2 f - A_2 A_3 A_1 f - A_1 A_3 A_2 f + A_2 A_1 A_3 f$$

4.7. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem

Eğer $Af = 0$ denklemi farklı U_1 ve U_2 operatörleri altında invaryant ise

$$\left[U_1, A\right] f = \lambda_1 A f\,, \qquad \left[U_2, A\right] f = \lambda_2 A f \tag{4.7.1}$$

elde ederiz. $U_1 f$, $U_2 f$ ve $Af = 0$ için Jacobi özdeşliğini uygularsak,

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f + \left[\left[U_2, A\right], U_1\right] f + \left[\left[A, U_1\right], U_2\right] f = 0 \tag{4.7.2}$$

olur. Komitator özellikleri ve (4.7.1) kullanılarak bu eşitliği düzenleyelim.

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f + \left[\left[U_2, A\right], U_1\right] f + \left[\left[A, U_1\right], U_2\right] f = 0 \tag{4.7.3}$$

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f + \left[\lambda_2 A, U_1\right] f + \left[-\lambda_1 A, U_2\right] f = 0 \tag{5.7.4}$$

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f + \lambda_2 \left[A, U_1\right] f - U_1 \lambda_2 A - \lambda_1 \left[A, U_2\right] f + U_2 \lambda_1 A = 0 \tag{4.7.5}$$

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f - \lambda_2 \lambda_1 A f - U_1 \lambda_2 A f + \lambda_1 \lambda_2 A f - \lambda_2 \lambda_1 A f + U_2 \lambda_1 A f = 0 \tag{4.7.6}$$

$$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f - U_1 \lambda_2 A + U_2 \lambda_1 A f = 0 \tag{4.7.7}$$

$\left[\left[U_1, U_2\right], A\right] f = \left(U_1 \lambda_2 - U_2 \lambda_1\right) A f$ olur, $\mu = U_1 \lambda_2 - U_2 \lambda_1$ alındığında,

$$\big[[U_1,U_2],A\big]f=\mu Af \tag{4.7.8}$$

elde ederiz. Buna göre:

Teorem. Eğer $Af=0$ denklemi farklı U_1 ve U_2 operatörleri altında invaryant ise $[U_1,U_2]$ altında da invaryanttır.

Eğer $[U_1,U_2]f$ ifadesi, a_1 ve a_2 nin birer sabite ve ρ nün çok değişkenli bir fonksiyon olduğu,

$$a_1U_1f+a_2U_2f+\rho(x,y,z)Af \tag{4.7.9}$$

formunda değilse, farklı U_1 ve U_2 operatörlerinden $Af=0$ denklemine göre farklıdır denir. Bu durumda teorem, $Af=0$ denkleminin altında invaryant olduğu yeni bir grup operatörü verir. Teorem, bu yeni elde edilen grup operatörü ile eldeki ikisinden birine tekrar uygulanabilir. Ve böyle devam edilebilir.

Üç değişkenli birinci mertebeden dört homojen lineer kısmi diferansiyel ifade arasında bir lineer bağıntı her zaman mevcuttur. Aşağıdaki eşitliklerden $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ leri elimine ederek bir determinant yardımı ile bu lineer bağıntı elde edilir.

$$U_1f=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y}+\varsigma_1\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.7.10}$$

$$U_2f=\xi_2\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial y}+\varsigma_2\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.7.11}$$

$$U_3f=\xi_3\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_3\frac{\partial f}{\partial y}+\varsigma_3\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.7.12}$$

$$U_4f=\xi_4\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_4\frac{\partial f}{\partial y}+\varsigma_4\frac{\partial f}{\partial z} \tag{4.7.13}$$

$$\begin{vmatrix} U_1f & \xi_1 & \eta_1 & \varsigma_1 \\ U_2f & \xi_2 & \eta_1 & \varsigma_2 \\ U_3f & \xi_3 & \eta_1 & \varsigma_3 \\ U_4f & \xi_4 & \eta_1 & \varsigma_4 \end{vmatrix}=0\,. \tag{4.7.14}$$

Buradaki katsayılar genellikle çok değişkenli fonksiyonlardır. Bir sonuç olarak,

$$[U_1,U_2]f=\alpha_1(x,y,z)U_1f+\alpha_2(x,y,z)U_2f+\rho(x,y,z)Af \tag{4.7.15}$$

her zaman mevcuttur. Burada eğer α_1 ve α_2 bir sabiteye dönüşürse, bu (4.7.9) formunu alır.

4.8. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmı Diferansiyel Denklemin Çözüm Metotları

İki önemli durum söz konusudur:

A. Eğer, α bir sabiteden farklı olmak üzere

$$U_2 f = \alpha(x, y, z) U_1 f + \rho(x, y, z) Af \tag{4.8.1}$$

formunda bir bağıntı mevcutsa, U_2 ifadesi U_1 den farklı kabul edilir. Bu durumda $\alpha(x, y, z)$ katsayısı $Af = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Çünkü, $Af = 0$ denklemi U_2 altında invaryant olduğundan, $[U_2, A]$ ifadesi A in bir katı olmalıdır.

$$\begin{aligned} [\alpha U_1 + \rho A, A] f &= \alpha [U_1, A] f - A\alpha U_1 f - A\rho Af \\ &= (\alpha\lambda_1 - A\rho) Af - A\alpha U_1 f \end{aligned} \tag{4.8.2}$$

U_1 aşikar grup operatörü olarak kabul edilmediğinden, yani Af ifadesi $U_1 f$ in bir katı olmadığından, $[U_2, A] f$ in Af in bir katı olmasının tek yolu $A\alpha = 0$ alınmasıdır. Bu yüzden α burada $Af = 0$ ın bağımsız çözümlerinden biri olarak bulunur.

$Af = 0$ ın ikinci çözümünün bulunması için aşağıdaki yolardan biri takip edilebilir:

1. $Af = 0$ denklemi U_1 operatörü alında invaryant olduğundan, $U_1\alpha$ da ayrıca $Af = 0$ ın çözümüdür. Eğer $U_1\alpha$ ifadesi α dan farklı ise $Af = 0$ ın genel çözümü için gerekli olan ikinci çözüm olarak alınabilir.

2. Eğer $U_1\alpha$ ifadesi α nın bir fonksiyonu ise veya sıfırdan farklı bir sabit ise aşağıdaki iki metot uygundur:

(**a**) $Af = 0$ ve $U_1 f = 0$ [veya $U_2 f = 0$] a ortak çözüm Konu 4.2 veya 4.3 deki metotlar yardımı ile bulunabilir. $U_1\alpha \neq 0$ olduğundan, bu ortak çözüm α dan bağımsız olacaktır.

(**b**) α en az bir değişken içermelidir, buna z diyelim, $z = \alpha(x, y, z)$ şeklideki yeni değişkeni z yerine koyduğumuzda $Af = 0$ denklemi

$$\boldsymbol{P}(x,y,\boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{Q}(x,y,\boldsymbol{z})\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{4.8.3}$$

olarak iki değişkenli hale indirgenir, burada $\boldsymbol{z}$ bir sabite olarak ortaya çıkacaktır çünkü $\frac{\partial f}{\partial z}$ nin katsayısı sıfırdır. $U_1\alpha\neq 0$ olduğundan bu yeni denklem U_2 ve U_1 operatörlerinin yardımı olmadan integre edilmelidir.

3. $U_1\alpha=0$ ise, Konu 4.5 deki metot kullanılabilir. Burada yeni $\boldsymbol{z}$ değişkeninin tanımlanması yukarıda olduğu gibi aynı diferansiyel denklemi verir. Fakat bu durumda altında diferansiyel denklemin invaryant olduğu dönüştürülmüş grup

$$\boldsymbol{\xi}_1(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}+\boldsymbol{\eta}_1(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} \tag{4.8.4}$$

z yi değişmez bırakır. Bu yüzden Konu 2.1 ve 2.8 deki metotlar, bu dönüştürülmüş kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen adi diferansiyel denklem

$$\boldsymbol{P}dx-\boldsymbol{Q}dy=0 \tag{4.8.5}$$

in çözülmesi için kullanılabilir.

B. Eğer U_1f,U_2f,Af arasında (4.8.1) tipinde bir bağıntı yok ise, her zaman mevcut olan

$$[U_1,U_2]f=\alpha_1(x,y,z)U_1f+\alpha_2(x,y,z)U_2f+\rho(x,y,z)Af \tag{4.8.6}$$

bağıntısı , eğer α_1 ve α_2 nin ikisi de bir sabiteden farklı ise, çözüm için çalışacaktır. Şöyle ki; Konu 4.7 deki teorem ile $[U_1,U_2]$ ifadesi $Af=0$ ı invaryant bırakır. Bu yüzden

$$\big[[U_1,U_2],A\big]f=\mu Af \tag{4.8.7}$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned}[\alpha_1U_1f+\alpha_2U_2f+\rho Af,A]&=\alpha_1[U_1,A]f+\alpha_2[U_2.A]f-A\alpha_1U_1f-A\alpha_2U_2f-A\rho Af\\&=(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2-A\rho)Af-A\alpha_1U_1f-A\alpha_2U_2f\end{aligned}$$

ifadesinde U_1f,U_2f,Af arasında herhangi bir lineer bağıntının olmadığı kabul edildiğinden, $[U_1,U_2]f$ ifadesinin Af in bir katı olması için tek seçenek, $A\alpha_1=0$ ve $A\alpha_2=0$ alınmasıdır. Bu yüzden α_1 ve α_2, $Af=0$ ın çözümleridir.

1. α_1 ve α_2 çok değişkenli iki bağımsız çözüm ise, $Af=0$ genel çözümü biliniyor demektir.

2. Çözümlerden biri α çok değişkenli fonksiyonu, diğer çözüm α_2 de α_1 in bir fonksiyonu veya bir sabite olsun, bunlar için $U_1\alpha_1$ ve $U_2\alpha_2$ nin $Af = 0$ in ayrıca çözümleri olduğu kullanılabilir. Eğer bunlardan biri α_1 den farklı bir fonksiyon oluyorsa, ikinci çözüm olarak alınabilir.

$$Af = P_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + P_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{4.8.8}$$

denklemi $r+1$ tane farklı $U_1, U_2, \cdots U_{r+1}$ operatörü altında invaryant ve bu operatörlerin r tanesi ile $Af = 0$ arasında

$$\sigma_1 U_1 f + \sigma_2 U_2 f + \cdots + \sigma_r U_r f + \rho Af = 0 \tag{4.8.9}$$

şeklinde bir lineer bağıntı mevcut değilse fakat,

$$U_{r+1} f = \alpha_1 U_1 f + \alpha_2 U_2 f + \cdots + \alpha_r U_r f + \rho Af = 0 \tag{4.8.10}$$

şeklinde bir bağıntısı mevcutsa o zaman $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ ler $Af = 0$ ın çözümleridir.

3. Eğer $U_1\alpha_1$ ve $U_2\alpha_2$ ler α_1 in fonksiyonları veya birer sabite iseler, yukarıdaki A seçeneğinin (a) ve (b) kısımlarındaki metotlar kullanılabilir.

Veya;

(a) $U_1\alpha_1$ ve $U_2\alpha_2$ den biri sıfır ise, $V = U_2\alpha_1 U_1 - U_1\alpha_1 U_2$ ifadesi $Af = 0$ ı değişmez bırakır ve $V\alpha_1 = 0$ dır; sonuç olarak (a) kullanılabilir.

4. α_1 ve α_2 nin ikisi de sabite ise, bunlara a_1 ve a_2 diyelim, $Af = 0$ ve $U_1 f = 0$ a ortak çözüm ve $Af = 0$ ve $U_2 f = 0$ a ortak çözüm bulunabilir. Bu çözümler bağımsız olacaktır, çünkü $U_1 f, U_2 f, Af$ arasında herhangi bir lineer bağıntı yoktur (Konu 4.1 Teo. II). Burada Konu 4.3 deki metotta ortaya çıkan tam diferansiyel denklemler için bir bazen iki integrasyon çarpanının bulunabileceği gösterilecektir (Fakat bazen integrasyon çarpanını bulmak aşağıda verilen yöntemden daha kolay olabilir).

$[U_1, U_2] f = a_1 U_1 f + a_2 U_2 f + \rho Af$ ifadesinde a_1 ve a_2 nin ikisi birden sıfır veya ikisi birden sıfırdan farklı olsun.

(a) Eğer $a_1 = a_2 = 0$ ise $[U_1, U_2] f = \rho Af$ olur.

$Af = 0$ denklemi U_2 altında invaryant olduğundan

$$[U_2, A] f = \lambda_2 Af \tag{4.8.11}$$

olur. Eğer $\phi(x,y,z)$ fonksiyonu $Af=0$ ve $U_1 f=0$ ın ortak çözümü ise

$[U_1,U_2]\phi = U_1U_2\phi + U_2U_1\phi = \rho A\phi = 0$ olduğundan dolayı $U_1U_2\phi = 0$ dır;

$[U_2,A]\phi = U_2A\phi + AU_2\phi = \lambda_2 A\phi = 0$ olduğundan dolayı $AU_2\phi = 0$ dır.

Bu eşitlikler sadece $U_2\phi$ nin $Af=0$ ve $U_1 f=0$ denklemlerinin çözümü olması durumunda gerçekleşir; yani $U_2\phi$ ifadesi ϕ nin bir fonksiyonu olmak zorundadır, buna $F(\phi)$ diyelim. İlave olarak $F(\phi)\neq 0$ dır, çünkü bağımsız olduklarından dolayı $U_1 f=0, U_2 f=0, Af=0$ ortak çözüme sahip olamazlar. Konu 2.1 de yapıldığı gibi, $U_1 f=0$, $Af=0$ nin ortak ϕ çözümü $U_2\phi=1$ olacak şekilde seçilebilir. Sonuç olarak bu çözüm

$$A\phi = P\frac{\partial\phi}{\partial x} + Q\frac{\partial\phi}{\partial y} + R\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{4.8.12}$$

$$U_1\phi = \xi_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial\phi}{\partial y} + \varsigma_1\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{4.8.13}$$

$$U_2\phi = \xi_2\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial\phi}{\partial y} + \varsigma_2\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{4.8.14}$$

şeklinde üç denklemi sağlaması gerekir. Bu denklemler $\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ ifadelerini belirler, çünkü ϕ

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \tag{4.8.15}$$

ifadesinden

$$\phi = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ \xi_1 & \eta_1 & \varsigma_1 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \xi_1 & \eta_1 & \varsigma_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \varsigma_2 \end{vmatrix} \tag{4.8.16}$$

bir integral ile bulunur. Aynı yolla $U_2 f=0$, $Af=0$ e ortak çözüm olan ψ fonksiyonu $U_1\psi = -1$ alınarak

$$\psi = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ \xi_2 & \eta_2 & \varsigma_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{4.8.17}$$

şeklinde elde edilir. Δ determinantı bu sebepten Konu 4.3 deki metotta $Af = 0$ ın bağımsız çözümlerinin bulunması için ortaya çıkan tam diferansiyel denklemler için bir integrasyon çarpanı olarak görülebilir.

(b) a_1 ve a_2 sadece biri sıfırsa, bu $a_2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left[U_1, U_2\right] f = a_1 U_1 f + \rho A f \tag{4.8.18}$$

olur. Yukarıdaki aynı yolla, eğer ϕ fonksiyonu $U_1 f = 0$, $Af = 0$ e ortak çözüm ise $U_2 F(\phi) \neq 0$ olur. Bu yüzden ϕ nin $U_2 \phi = 1$ şeklinde olan bu formu

$$\phi = \int \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ P & Q & R \\ \xi_1 & \eta_1 & \varsigma_1 \end{vmatrix}}{\Delta} \tag{4.8.19}$$

ile verilir. $Af = 0$ ın ϕ den bağımsız ikinci bir çözümünü bulmak için yukarıdaki A metodunu 3. maddesi kullanılabilir veya $U_2 f = 0$, $Af = 0$ ın ortak çözümü Konu 4.2 veya 4.3 metotlarından biri kullanılarak bulunabilir.

(c) Eğer a_1 ve a_2 ikisi de sıfırdan farklı ise

$$V = a_1 U_1 + a_2 U_2 \qquad \text{ve} \qquad U_2 \tag{4.8.20}$$

operatörleri ele alınabilir. Bunlar biri birinden farklıdır ve $Af = 0$ ı değişmez bırakır. İlave olarak,

$$\left[V, U_2\right] = a_1 U_1 + a_1 \rho A \tag{4.8.21}$$

dir. Burada yukarıdaki (b) metodu uygulanabilir.

V. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1. Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem

İkinci mertebeden

$$y'' = F\left(x, y, y'\right) \tag{5.1.1}$$

diferansiyel denklemi,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{F\left(x, y, y'\right)} \tag{5.1.2}$$

şeklindeki birinci mertebeden sisteme denktir.

Eğer bu sistemin çözümü,

$$u\left(x, y, y'\right) = a \text{ ve } v\left(x, y, y'\right) = b \tag{5.1.3}$$

ise (5.1.1) in çözümü, (5.1.3) deki iki denklemden y' yok edilerek elde edilebilir.

(5.1.2) u çözmek yerine, buna karşılık gelen

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + F\left(x, y, y'\right)\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{5.1.4}$$

lineer kısmi diferansiyel denklemin iki bağımsız u ve v çözümleri bulunabilir. Böylece (5.1.1) in çözülmesi problemi, (5.1.4) in iki bağımsız çözümünün bulunması problemine indirgenir.

Eğer (5.1.1) ifadesi bir U operatörü altında invaryant ise, x, y, y' değişkenlerini içeren (5.1.2) denk sistemi, genişletilmiş U' operatörü altında invaryanttır. Bu nedenle U' grubunun u ve v üzerindeki etkisi, bunları yine u ve v nin fonksiyonlarına dönüştürmek olacaktır; yani $U'u = \phi\left(u, v\right)$, $U'v = \psi\left(u, v\right)$. Bu yüzden u ve v yi çözüm olarak kabul eden (5.1.4) lineer kısmi diferansiyel

denklemi de U' operatörü altında invaryanttır. Sonuç olarak u ve v yi bulmak için Konu 5.5 deki metot kullanılabilir.

(5.1.1) ifadesinin U operatörü altında invaryant olması (5.1.4) ifadesinin genişletilmiş grup operatörü altında invaryant olmasını gerektirir. Eğer (5.1.1) ifadesi $U_1, U_2, \cdots, U_n$ grup operatörlerinin her biri altında invaryant ise $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sabiteler olmak üzere, $U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_n U_n$ grup operatörü altında invaryanttır.

Bu herhangi bir değişikliğe uğratılmaksızın herhangi mertebeden bir diferansiyel denkleme uygulanır, çünkü Konu 5.4 deki (5.4.9) koşulu, $Af = 0$ lineer kısmi diferansiyel denklemindeki değişkenlerin sayısından bağımsızdır.

5.2. İki Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem

Eğer U_1 ve U_2 grup operatörleri $y'' = F(x, y, y')$ diferansiyel denklemini invaryant bırakıyorsa, bu denkleme karşılık gelen,

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + F(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

kısmi diferansiyel denklemi de U_1' ve U_2' genişletilmiş grup operatörleri altında invaryanttır. Sonuç olarak Konu 5.8 deki metot, (5.1.1) denklemini çözmek için kullanılabilir.

5.3. İkinci Mertebeden Bir Diferansiyel Denklemi İnvaryant Bırakan Lineer Bağımsız Grup Operatörlerinin Sayısı

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin her zaman bir integrasyon çarpanı olduğundan, sınırsız sayıda grup operatörü tarafından invaryant bırakılır, bunlar iki keyfi fonksiyonu içeren genel ifadelerdir (Konu 2.4). Diğer taraftan, ikinci mertebe

(veya daha yüksek) bir diferansiyel denklem genellikle her grup operatörü tarafından değişmez bırakılmaz. İlgili teorem ve ispatı aşağıdaki şekildedir:

Teorem: İkinci mertebeden bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan lineer bağımsız grup operatörü sayısı sekizi geçemez.

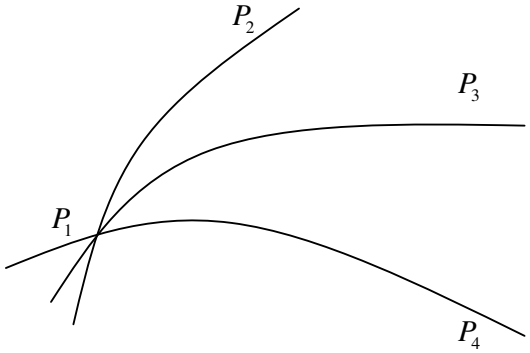
$$y'' = F\left(x, y, y'\right) \tag{5.3.1}$$

denkleminin $U_1, U_2, \cdots, U_9$ şeklinde dokuz lineer bağımsız grup operatörü tarafından değişmez bırakıldığını kabul edelim. Bu denklem ayrıca bütün mümkün $a_1, a_2, \cdots, a_9$ sabite değerleri için,

$$U = a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_9 U_9 = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{5.3.2}$$

operatörü altında da invaryanttır.

Fonksiyonlar teorisinden de bilindiği gibi, ikinci mertebe ve birinci derece bir diferansiyel denklemin tek bir integral eğrisi, (5.1.1) tarafından belirlenen mutlak bir bölge içindeki iki noktadan geçer. Şekildeki P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının oluşturduğu altı çiftten her birinin, farklı integral eğrileri belirlediğini kabul edelim. $a_1, a_2, \cdots, a_9$ sabiteleri öyle seçilebilir ki bu dört noktanın her biri (5.3.2) tarafından değişmez bırakılır.



Eğer bu noktaların koordinatları sırasıyla $\left(x_1, y_1\right)$, $\left(x_2, y_2\right)$, $\left(x_3, y_3\right)$, $\left(x_4, y_4\right)$ iseler, aşağıdaki sistem sağlanması gerekir; $\left(j = 1,2,3,4\right)$ için;

$$\xi\left(x_j, y_j\right) = a_1 \xi_1\left(x_j, y_j\right) + a_2 \xi_2\left(x_j, y_j\right) + \cdots + a_9 \xi_9\left(x_j, y_j\right) = 0 \tag{5.3.3}$$

$$\eta\left(x_j, y_j\right) = a_1 \eta_1\left(x_j, y_j\right) + a_2 \eta_2\left(x_j, y_j\right) + \cdots + a_9 \eta_9\left(x_j, y_j\right) = 0 \tag{5.3.4}$$

Bu denklemler, dokuz dönüşümün lineer bağımsız olmasından dolayı, a ların sekizinin dokuzuncusuna oranlarının sonlu değerlerini belirler, a ların bu şekilde seçilmesi ile (5.3.2) dönüşümü P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarını değişmez bırakır, bu nedenle bu noktaların herhangi ikisi ile belirlenen integral eğrileri de invaryant bırakılır. Çünkü integral eğrileri, bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan bir dönüşüm ile tekrar integral eğrilerine dönüşür ve bu dört nokta öyle seçilmiştir ki, herhangi ikisinden tek bir integral eğrisi geçer. Sonuç olarak, bu noktaların her birinden, örneğin buna P_1 diyelim, bu invaryant integral eğrilerinin üçü geçer. P_1 noktası (5.3.2) tarafından invaryant bırakıldığından, bu eğrilerin bu noktadaki eğimleri de (5.3.2) tarafından invaryant bırakılır. Bu eğimleri $y_{12}', y_{13}', y_{14}'$ ile gösterelim. (5.3.2) dönüşümüne karşılık gelen genişletilmiş dönüşümün $\frac{\partial f}{\partial y'}$ ye ait katsayı olan

$$\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \tag{5.3.5}$$

ifadesi, $x = x_1,\ y = y_1,\ y' = y_{12}, y_{13}, y_{14}$ için

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right) y_{12}' - \frac{\partial \xi}{\partial y_1} y_{12}'^2 = 0 \tag{5.3.6}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right) y_{13}' - \frac{\partial \xi}{\partial y_1} y_{13}'^2 = 0 \tag{5.3.7}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right) y_{14}' - \frac{\partial \xi}{\partial y_1} y_{14}'^2 = 0 \tag{5.3.8}$$

olur. Burada $a = \frac{\partial \eta}{\partial x_1},\ b = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right),\ c = -\frac{\partial \xi}{\partial y_1}$ alındığında yukarıdaki denklem sistemi,

$$a + by_{12}' + cy_{12}'^2 = 0 \tag{5.3.9}$$

$$a + by_{13}' + cy_{13}'^2 = 0 \tag{5.3.10}$$

$$a + by_{14}' + cy_{14}'^2 = 0 \tag{5.3.11}$$

şeklini alır. Katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & y_{12}' & y_{12}'^2 \\ 1 & y_{13}' & y_{13}'^2 \\ 1 & y_{14}' & y_{14}'^2 \end{vmatrix} = \left(y_{13}' - y_{14}'\right)\left(y_{14}' - y_{12}'\right)\left(y_{12}' - y_{13}'\right) \qquad (6.3.12)$$

sıfırdan farklı olduğundan, $a = b = c = 0$ olur. P_1 den geçen bütün integral eğrileri invaryant olduğundan, P_1 den geçen her integral eğrisi için $\eta' = 0$ olur.

Tamamen aynı şekilde, diğer P_2, P_3, P_4 noktalarından geçen her bir integral eğrisinin (5.3.2) tarafından değişmez bırakıldığı gösterilebilir.

Eğer P noktası P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarını içeren bölgedeki beşinci herhangi bir nokta ise, her biri bu noktaların birinden geçen en az iki integral eğrisi üzerinde yer alacaktır. Bu integral eğrileri invaryant olduğundan, P noktası da (5.3.2) tarafından değişmez bırakılacaktır. Bu şekilde düzlemdeki her nokta (5.3.2) tarafın değişmez bırakılacaktır. Sonuç olarak

$$a_1 U_1 f + a_2 U_2 f + \cdots + a_9 U_9 f = 0 \qquad (5.3.13)$$

olacaktır. Bu yüzden, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan herhangi dokuz grup operatörü lineer bağımsız olamaz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

VI. BÖLÜM

6.1. Tartışma

Bu çalışmada, bir parametreli Lie grubuna ait sürekli dönüşümlerden elde edilen ve genel ifadesi

$$U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

şeklinde olan operatörün, invaryantlık kavramı ile bütünleşerek, diferansiyel denklemlerin çözümünde nasıl bir rol oynadığı gösterilmeye çalışılmıştır. Bir parametreli Lie grupları ve diferansiyel denklemlere uygulanmasında birçok özellik ve teorem, bu operatörün özelliklerine indirgenerek ortaya çıkar.

Belirli bir dönüşüm grubu (veya denk ifade olarak "grup operatörü") altında invaryant fonksiyonların, eğrilerin veya eğriler ailesinin bilinmesi ve bunların bazı diferansiyel denklemlerin çözümleri olması, aralarında bir ilişkiyi kendiliğinden ortaya koymuştur. Böylelikle, bir parametreli Lie grupları yardımı ile bu grupların operatörleri altında invaryant eğriler ve bu eğrileri integral eğrileri olarak kabul eden diferansiyel denklemler arasında ilişki kurulmaktadır. Bu ilişki de diferansiyel denkleme dönüşen bazı geometrik problemlerin çözülmesinde gerekli integrasyon çarpanlarının bulunmasında kullanılır. Diferansiyel metot kullanılarak elde edilen genişletilmiş dönüşüm grubu ve bu gruba ait Lie operatörü, eğriler ve eğri aileleri ile yüksek mertebeli diferansiyel denklemler arasında ilişki kurarak, bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerini kolaylaştırmakla kalmaz aynı zamanda bu diferansiyel denklemleri genel tipleri bakımından sınıflandırır.

Literatür taraması ve çalışması olarak yapılan bu çalışmada, birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ile birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin bir parametreli Lie grupları yardımı ile çözümleri incelenmiştir.

Daha ileri çalışmalar için, çok parametreli Lie grupları ile bu gruplara ait operatörler gibi konuların detaylı olarak çalışılması ve incelenmesi gerekir.

EK-A

1) ***Bir Parametreli Lie Grubu:***

$$G=\left\{T_a \,\middle|\, T_a : \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \to \underset{(x_1,y_1)}{\mathbb{R}^2} \ ,\ x_1 = x\cos a - y\sin a \ ,\ y_1 = x\sin a + y\cos a \ , a\in\mathbb{R}\right\}$$

kümesinin bir parametreli Lie grubu oluşturduğunu gösterelim.

1. $T_a(x,y)=(x\cos a - y\sin a, x\sin a + y\cos a)$ ve

$$T_b(x,y)=(x\cos b - y\sin b, x\sin b + y\cos b)$$

eşitlikleri ile yazılan $\forall\ T_a, T_b \in G$ için;

$$(T_a \circ T_b)(x,y) = T_a\left[(x\cos b - y\sin b, x\sin b + y\cos b)\right]$$

$$= \left(\left[x\cos a - y\sin a\right]\cos b - \left[x\sin a + y\cos a\right]\sin b, \left[x\cos a - y\sin a\right]\sin b - \left[x\sin a + y\cos a\right]\cos b\right)$$

$$= \left(x\cos(a+b) - y\sin(a+b), x\sin(a+b) + y\cos(a+b)\right)$$

Burada $a+b=c\in\mathbb{R}$ olarak aldığımızda,

$$(T_a \circ T_b)(x,y) = \left(x\cos(a+b) - y\sin(a+b), x\sin(a+b) + y\cos(a+b)\right)$$

$$= \left(x\cos c - y\sin c, x\sin c + y\cos c\right) = T_c(x,y)$$

işlemi sonucunda $T_c(x,y)$ elde edilir ve $T_c \in G$ dir.

2. Yukarıdaki işlemlerle $T_a \circ T_b$ işleminin kuralı $T_a \circ T_b = T_{a+b}$ şeklinde ortaya çıktığından, $\forall\ T_a, T_b, T_c \in G$ için,

$$(T_a \circ T_b)\circ T_c = T_{a+b}\circ T_c = T_{a+b+c} = T_{a+(b+c)} = T_a \circ T_{b+c} = T_a \circ (T_b \circ T_c)$$

elde edilir.

3. Şimdi $T_a \circ T_{a_0} = T_{a_0} \circ T_a = T_a$ eşitliklerini $\forall T_a \in G$ için sağlayan $\exists T_{a_0} \in G$ nin varlığını araştıralım. $T_a \circ T_{a_0} = T_{a+a_0}$ ve $T_{a_0} \circ T_a = T_{a_0+a}$ ifadeleri için $a_0 = 0$ aldığımızda, $T_a \circ T_0 = T_{a+0} = T_a$ ve $T_0 \circ T_a = T_{0+a} = T_a$ elde ederiz. Burada $a_0 = 0$ parametresi ile belirlenen dönüşümün kendisi $T_0(x,y) = (x\cos 0 - y\sin 0, x\sin 0 + y\cos 0) = (x,y)$ şeklindedir ve düzlemdeki bütün noktaları değişmez bırakan dönüşümdür. Böylelikle elde ettiğimiz dönüşüm özdeşlik dönüşümüdür ve $T_0 \in G$ dir.

4. $\forall T_a \in G$ için $T_a^{-1} \circ T_a = T_a \circ T_a^{-1} = T_{a_0}$ sağlayan $\exists T_a^{-1} \in G$ nin olduğunu araştıralım. Bu eleman T_{-a} parametresi ile belirleneceği açıktır. Çünkü $T_a \circ T_{-a} = T_{a+(-a)} = T_0$ ve $T_{-a} \circ T_a = T_{(-a)+a} = T_0$ olur. Buradan $T_{-a} = T_a^{-1}$ yazıldığında $T_a^{-1} \in G$ elde edilir.

2) ***Sonsuz Küçük Dönüşüm:***

Sonlu dönüşümleri

$$\phi(x, y, a) = x\cos a - y\sin a\,,\ \psi(x, y, a) = x\sin a + y\cos a$$

şeklinde olan bir parametreli grubunun $\delta x = \xi(x, y)\delta a$, $\delta y = \eta(x, y)\delta a$ şeklindeki sonsuz küçük dönüşümü (1.3.3) ü kullanarak,

$$\xi(x, y) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)_{a=0} = (-x\sin a - y\cos a\big|_{a=0} = -y \tag{A.2}$$

$$\eta(x, y) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial a}\right)_{a=0} = (x\cos a - y\sin a\big|_{a=0} = x \tag{A.3}$$

(1.3.4) formunda $\delta x = -y\delta a$, $\delta y = x\delta a$ olarak bulunur.

3) ***Grup (Lie) Operatörü:***

Sonlu dönüşümleri

$$\phi(x, y, a) = x\cos a - y\sin a\,,\ \psi(x, y, a) = x\sin a + y\cos a$$

şeklinde olan bir parametreli dönüşüm grubu için $\xi(x, y) = -y$, $\eta(x, y) = x$ olduğundan grup operatörü $U = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ formundadır.

4) ***Grup Operatörünün Ürettiği Dönüşüm Grubu:***

$U = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ operatörünün ürettiği gurubu bulalım.

I. YOL: (1.5.3), (1.5.4) ve (1.5.5) ifadelerini kullanalım.

$$\frac{dx_1}{-y_1}=\frac{dy_1}{x_1}\Rightarrow x_1dx_1=-y_1dy_1\Rightarrow {x_1}^2+{y_2}^2=c_1=x^2+y^2$$

elde ederiz.

$$u(x_1,y_1)={x_1}^2+{y_1}^2=x^2+y^2 \tag{A.4}$$

olur.

$\frac{dy_1}{x_1}=\frac{dt}{1}$ ve $x_1=\sqrt{c_1-{y_1}^2}$ olduğundan,

$\int\frac{dy_1}{\sqrt{c-{y_1}^2}}=t+c_2$ integralinde $y_1=\sqrt{c_1}\sin\theta$ alındığında,

$\theta=c_2+k$ bulunur. Burada θ yerine eşiti yazıldığında,

$$\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)-t=c_2=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

olur.

$$v(x_1,y_1)=\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+t \tag{A.5}$$

Elde edilen iki çözümden sonlu dönüşümler $x_1=x\cos t-y\sin t$, $y_1=x\sin t+y\cos t$ bulunur.

II.YOL: (1.6.3) ten yola çıkarak (1.6.13) formunu elde edelim.

$$Ux=-y\frac{\partial x}{\partial x}+x\frac{\partial x}{\partial y}=-y$$

$$U^2x=U(Ux)=U(-y)=-y\frac{\partial(-y)}{\partial x}+x\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-x$$

$$U^3x=U(-x)=-y\frac{\partial(-x)}{\partial x}+x\frac{\partial(-x)}{\partial y}=y$$

$$U^4x=U(y)=-y\frac{\partial(y)}{\partial x}+x\frac{\partial(y)}{\partial y}=x,\qquad U^5x=-y,\qquad U^6y=-x$$

şeklinde devam edecektir. Aynı işlemleri y için yapalım.

$$Uy=-y\frac{\partial y}{\partial x}+x\frac{\partial y}{\partial y}=x$$

$$U^2 y = U(Uy) = U(x) = -y\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial x}{\partial y} = -y$$

$$U^3 y = U(-y) = -y\frac{\partial(-y)}{\partial x} + x\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -x$$

$$U^4 y = U(-x) = -y\frac{\partial(-x)}{\partial x} + x\frac{\partial(-x)}{\partial y} = y, \qquad U^5 y = x, \qquad U^6 y = -y$$

olur. Elde edilen değerler yerine konulduğunda,

$$x_1 = e^{tU} x = x - yt - x\frac{t^2}{2!} + y\frac{t^3}{3!} + x\frac{t^4}{4!} - y\frac{t^5}{5!} - x\frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$x_1 = x(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots) - y(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots) \tag{A.6}$$

buluruz. Devamında,

$$y_1 = e^{tU} y = y + xt - y\frac{t^2}{2!} - x\frac{t^3}{3!} + y\frac{t^4}{4!} + x\frac{t^5}{5!} - y\frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$y_1 = x(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots) + y(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots) \tag{A.7}$$

buluruz.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots, \quad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

olduğundan,

$$x_1 = x\cos t - y\sin t \ , y_1 = x\sin t + y\cos t$$

sonlu dönüşümleri elde edilir.

4) ***Grup Operatörü Altında İnvaryant Fonksiyon:***

$U = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant olan fonksiyonun genel tipini bulalım. Bunun için, (1.7.3) ve (1.7.4) ü kullanarak (1.7.5) formuna ulaşalım.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = -ydy \Rightarrow x^2 + y^2 = c$$

elde ederiz.

$$u(x, y) = x^2 + y^2 = c$$

Buradan, $f = F(x^2 + y^2)$ elde ederiz.

5) ***Genişletilmiş Grup Operatörü Ve Altında İnvaryant Fonksiyon:***

(2.2.9) i kullanarak (2.2.7) formundaki genişletilmiş dönüşüm grubunu bularak, (2.2.12) koşulu yardımıyla, $U = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant eğri ailesine ait diferansiyel denklemin, genişletilmiş operatör altında in varyant olup olmadığını araştıralım.

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx} = \frac{dx}{dx} - y'\frac{d(-y)}{dx}$$

$$\eta' = 1 + y'^2 \qquad \text{(A.8)}$$

bulunur. Buradan genişletilmiş operatör formu,

$$U' = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta'\frac{\partial}{\partial y'}$$

olduğundan,

$$U' = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + (1 + y'^2)\frac{\partial}{\partial y'} \qquad \text{(A.9)}$$

elde ederiz.

U operatörü altında invaryant olan $\frac{y}{x} = c$ doğruları ailesinin diferansiyel denklemi $xy' - y = 0$ şeklindedir. Şimdi bu diferansiyel denklemin genişletilmiş operatör altında invaryant olup olmadığına bakalım. Yani,

$$f = 0 \text{ iken } Uf = 0 \qquad \text{(A.10)}$$

olacak mıdır? Burada $f(x, y, y') = xy' - y = 0$ olduğundan,

$$Uf = U'(xy' - y) = -yy' - x + (1 + y'^2)x = y'(xy' - y) \qquad \text{(A.11)}$$

elde edilir. Burada $xy' - y = 0$ olan her durumda $Uf = y' \cdot 0 = 0$ olduğu görülür.

6) ***Grup Operatörü altında invaryant diferansiyel denklemin genel tipi:***

$U = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant diferansiyel denklemin genel tipini bulalım.

$$\eta' = \frac{dx}{dx} - y'\frac{d(-y)}{dx} = 1 + y'^2,$$

$$\eta' = 1 + y'^2$$

olur. Buradan,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1 + y'^2} \tag{A.12}$$

yazıldığında

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{ve} \qquad u'(x, y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \tan^{-1} y'$$

buluruz. Burada u' nün tanjantını alabiliriz (çünkü bir invaryantın keyfi bir fonksiyonu yine bir invaryanttır). Bu durumda,

$$u' = \frac{y - xy'}{x + yy'} \tag{A.13}$$

olur. Sonuç olarak invaryant diferansiyel denklemin genel tipi

$$f\left(x^2 + y^2, \frac{y - xy'}{x + yy'}\right) = 0 \qquad \text{veya} \qquad \frac{y - xy'}{x + yy'} = F\left(x^2 + y^2\right) \tag{A.14}$$

olur.

7) ***İki Kez Genişletilmiş Operatör:***

Operatörü $U = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ olan dönüşüm grubunun (3.1.8) formundaki iki kez genişletilmiş operatörünü bulalım. Bunun için,

$$\eta' = 1 + y'^2, \quad \eta'' = 3y'y''$$

elde edilir. Bulunanlar genel ifadede yerine konulduğunda,

$$U'' = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \left(1+y'^2\right)\frac{\partial}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial}{\partial y''}$$

genişletilmiş ifadesi bulunur.

8) ***Grup Operatörü Altında İnvaryant İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem:***

$U = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel tipini bulalım. Bunun için (3.2.2) koşulunun bir sonucu olarak (3.2.4) ü kullanalım.

$$\eta' = \frac{dx}{dx} - y'\frac{d(-y)}{dx} = 1+y'^2,$$

$$\eta'' = \frac{d\eta'}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\left(1+y'^2\right)}{dx} - y''\frac{d\left(-y\right)}{dx} = 3y'y''$$

bulunur. Bulunanlar,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta'} = \frac{dy''}{\eta''} \tag{A.15}$$

ifadesinde yerine konulduğunda,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''} \tag{A.16}$$

adi diferansiyel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemin çözümü

$$u = x^2+y^2, \quad u' = \frac{y-xy'}{x+yy'}, \quad u'' = \frac{y''^2}{\left(1+y'^2\right)^3} \tag{A.17}$$

şeklindedir. Sonuç olarak $U = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ operatörü altında invaryant ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel tipi

$$f\left(x^2+y^2, \frac{y-xy'}{x+yy'}, \frac{y''^2}{\left(1+y'^2\right)^3}\right) = 0 \text{ veya } \frac{y''^2}{\left(1+y'^2\right)^3} = F\left(x^2+y^2, \frac{y-xy'}{x+yy'}\right) \tag{A.18}$$

şeklindedir.

EK-B

1) ***Tam Sistem:***

$A_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$

$A_2 f = \left(x^2 + y^2 + yz\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(x^2 + y^2 - xz\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(xz + yz\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ Denklemlerinin ortak çözümünü bulmak için bu sistemin bir tam sistem olup olmadığına bakalım:

$$\left[A_1, A_2\right] f = A_1\left(A_2 f\right) - A_2\left(A_1 f\right) = A_2 f \tag{B.1}$$

elde edildiğinden $A_1 f = 0$ ve $A_2 f = 0$ denklemleri tam sistem oluşturur (4.1.10). Şimdi $A_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ denkleminin çözümünü bulalım:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \tag{B.2}$$

sisteminin çözümü $u = \frac{x}{z}$ ve $v = \frac{y}{z}$ olarak bulunur. Buradan

$$A_2 u = \left(x^2 + y^2 + yz\right)\frac{\partial\left(\frac{x}{z}\right)}{\partial x} + \left(x^2 + y^2 - xz\right)\frac{\partial\left(\frac{x}{z}\right)}{\partial y} + \left(xz + yz\right)\frac{\partial\left(\frac{x}{z}\right)}{\partial z} = \frac{y^2 + yz - xy}{z}$$

ve

$$A_2 v = \left(x^2 + y^2 + yz\right)\frac{\partial\left(\frac{y}{z}\right)}{\partial x} + \left(x^2 + y^2 - xz\right)\frac{\partial\left(\frac{y}{z}\right)}{\partial y} + \left(xz + yz\right)\frac{\partial\left(\frac{y}{z}\right)}{\partial z} = \frac{x^2 - xz - xy}{z}$$

elde ederiz. Devamında,

$$\frac{A_2 v}{A_2 u} = \frac{x^2 - xz - xy}{y^2 + yz - xy} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{x}{z}}{\frac{y}{z}} = -\frac{u}{v} \tag{B.3}$$

yazılır ve $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{u}{v}\frac{\partial F}{\partial v} = 0$ denklemine karşılık gelen $\frac{du}{1} = \frac{dv}{-\frac{u}{v}}$ adi diferansiyel denklemi ile $u^2 + v^2 = c$ elde edilir. Sonuç olarak $u^2 + v^2$ nin herhangi bir fonksiyonu

genel çözümdür. Bu yüzden $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ nin herhangi fonksiyonu tam sistemin ortak çözümüdür.

İkinci bir yol olarak, bu denklemlerdeki $P_1 = x$, $Q_1 = y$, $R_1 = z$, $P_2 = x^2 + y^2 + yz$, $Q_2 = x^2 + y^2 - xz$, $R_2 = xz + yz$ katsayıları,

$$(Q_1R_2 - Q_2R_1)dx + (R_1P_2 - R_2P_1)dy + (P_1Q_2 - P_2Q_1)dz = 0 \qquad \text{(B.4)}$$

denkleminde yerine konulduğunda,

$$xzdx + yzdy - (x^2 - y^2)dz = 0 \qquad \text{(B.5)}$$

elde edilir. Ortak çözüm $\frac{x^2+y^2}{z^2} = sbt.$ şeklindedir.

2) *Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem:*

$Af = (x^2 + y^2 + yz)\frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 + y^2 - xz)\frac{\partial f}{\partial y} + (xz + yz)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ kısmi diferansiyel denklemini, altında invaryant olduğu grup operatörü yardımı ile çözelim.

Bu denklem $U = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ operatörü altında invaryanttır. Çünkü $[U, A]f = 2Af$ dir. Burada $[U, A]f = 2Af$ olması aynı zamanda bunların bir tam sistem oluşturduğunu da gösterir (4.4.9). Yani $Af = 0$ ve $Uf = 0$ ın ortak bir çözümü bulunabilir. Bu denklemlerdeki $P = x^2 + y^2 + yz$, $Q = x^2 + y^2 - xz$, $R = xz + yz$, $\xi = x$, $\eta = y$, $\varsigma = z$ katsayıları,

$$(Q\varsigma - \eta R)dx + (R\xi - \varsigma P)dy + (P\eta - \xi Q)dz = 0 \qquad \text{(B.6)}$$

denkleminde yerine konulduğunda

$$xzdx + yzdy - (x^2 + y^2)dz = 0$$

elde edilir. Bu denklem $\frac{1}{z(x^2+y^2)}$ integrasyon çarpanı ile çarpıldığında

$$\frac{xdx}{(x^2+y^2)} + \frac{ydy}{(x^2+y^2)} - \frac{dz}{z} = 0 \qquad \text{(B.7)}$$

şeklini alır. Ortak çözüm $\phi(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ şeklindedir.

$$Af=\left(x^2+y^2+yz\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(x^2+y^2-xz\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(xz+yz\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

denklemine ait diğer çözüm

$$\frac{xdx}{x^2+y^2+yz}=\frac{ydy}{x^2+y^2-xz}=\frac{dz}{xz+yz} \tag{B.8}$$

adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü ile elde edilebilir. Burada eşitlikler

$$\frac{xdx-ydy}{xz+yz}=\frac{dz}{xz+yz} \tag{B.9}$$

şeklinde düzenlendiğinde çözüm; $x-y-z=sbt.$ şeklindedir. Sonuç olarak $Af=0$ a ait iki bağımsız çözüm $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ ve $x-y-z$ dir.

3) ***İki Farklı Grup Operatörü Altında İnvaryant Lineer Kısmı Diferansiyel Denklemin Çözümü:***

$Af=\left(x+y\right)\dfrac{\partial f}{\partial x}+\left(x+y\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}-\left(x+y+2z\right)\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$ kısmi diferansiyel denklemini, altında invaryant olduğu iki grup operatörü yardımı ile çözelim. Bu denklem

$$U_1=\left(x+y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(x+y\right)\frac{\partial}{\partial y}+2z\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.10}$$

$$U_2=z\left(x+y\right)^2\frac{\partial}{\partial x}+z\left(x+y\right)^2\frac{\partial}{\partial y}+\left[\left(xy+2z^2\right)\left(x+y\right)+4xyz\right]\frac{\partial}{\partial z} \tag{B.11}$$

grup operatörleri altında invaryanttır.

Burada $\Delta=\begin{vmatrix}\left(x+y\right) & \left(x+y\right) & -\left(x+y+2z\right)\\ \left(x+y\right) & \left(x+y\right) & 2z\\ z\left(x+y\right)^2 & z\left(x+y\right)^2 & \left[\left(xy+2z^2\right)\left(x+y\right)+4xyz\right]\end{vmatrix}=0$ (B.12)

şeklindedir (4.8.16).

Burada $U_2f=\left(yz+zx+xy\right)U_1f-xyAf$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $yz+zx+xy$ ifadesi $Af=0$ ın bir çözümüdür. Devam edersek,

$$U_1\left(yz+zx+xy\right)=4\left(yz+zx+xy\right)+\left(x-y\right)^2 \tag{B.13}$$

olduğundan ayrıca bir çözümdür. Sonuç olarak $Af=0$ ın genel çözümü

$$\Phi\left(yz+zx+xy,x-y\right)=0 \tag{B.14}$$

şeklindedir.

4) ***Bir Grup Operatörü Altında İnvaryant 2. Mertebe Diferansiyel Denklem:***

$yy''+y'^2=1$ diferansiyel denklemini altında invaryant olduğu grup operatörü yardımı ile çözelim. Bu diferansiyel denklem tipi $U=\dfrac{\partial}{\partial x}$ grup operatörü altında invaryanttır. Burada $yy''+y'^2=1$ diferansiyel denklemi

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=\frac{dy'}{F\left(x,y,y'\right)} \tag{B.16}$$

formuna uygun olarak,

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y'}=\frac{dy'}{\dfrac{1-y'^2}{y}} \tag{B.17}$$

şeklinde yazılır. Bu sisteme karşılık gelen kısmi diferansiyel denklem ise

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1-y'^2}{y}\frac{\partial f}{\partial y'}=0 \tag{B.19}$$

şeklindedir. U operatörünün genişletilmiş formu $U'=\dfrac{\partial}{\partial x}$ olarak bulunur. Şimdi U' operatörünün $Af=0$ denklemini invaryant bıraktığını gösterelim.

$$\left[U',A\right]f=U'A-AU'=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+y'\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{1-y'^2}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)}{\partial x}-\left(\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}+y'\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}+\frac{1-y'^2}{y}\frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y'}\right)$$

$[U', A] f = 0$ olur. Bu durumda $U'f$ ve Af tam sistem oluşturduğundan Konu 4.2 deki metodu kullanarak $U'f$ ve Af e ortak bir çözüm bulunabilir. Bunu için önce $U'f = 0$ denkleminin çözümlerini bulalım. $U'f = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ denklemine karşılık gelen sistem

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{0}$$

şeklinde olup; çözümler $u = y$ ve $v = y'$ olarak bulunur. Buradan,

$$Au = \frac{\partial(y)}{\partial x} + y'\frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{y'(y - xy')}{xy}\frac{\partial(y)}{\partial y'} = y'$$

$$Av = \frac{\partial(y')}{\partial x} + y'\frac{\partial(y')}{\partial y} + \frac{1 - y'^2}{y}\frac{\partial(y')}{\partial y'} = \frac{1 - y'^2}{y}$$

elde edilir. Devamında,

$$\frac{A_2 v}{A_2 u} = \frac{\dfrac{1 - y'^2}{y}}{y'} = \frac{1 - y'^2}{yy'} = \frac{1 - v^2}{uv} \tag{B.20}$$

elde edilir. Bulunanlar,

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{A_2 v}{A_2 u}\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \tag{B.21}$$

denkleminde yerine konulduğunda,

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1 - v^2}{uv}\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Rightarrow u\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1 - v^2}{v}\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

Bu denklemin çözümü için denkleme karşılık gelen adi diferansiyel denklem,

$$\frac{du}{u} = \frac{vdv}{1 - v^2} \tag{B.22}$$

şeklindedir. Denklemin çözümü $F = u\sqrt{1 - v^2} = y\sqrt{1 - y'^2}$ olarak bulunur. Bu çözüm yardımı ile $\boldsymbol{y}' = y\sqrt{1 - y'^2}$ şeklinde yeni değişken tanımlandığında, $y' = \dfrac{\sqrt{y^2 - \boldsymbol{y}'^2}}{y}$ olur. Sonuç olarak elimizdeki denklem,

$$\boldsymbol{A}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{y^2 - \boldsymbol{y}'^2}}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{B.23}$$

şeklini alır. $\boldsymbol{A}f = 0$ a karşılık gelen sistem,

$$\frac{dx}{1} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - \boldsymbol{y}'^2}} \tag{B.24}$$

şeklinde olup çözümü $x - \sqrt{y^2 - \boldsymbol{y}'^2} = sbt$ veya ilk değişkenler ile $x - yy' = sbt.$ şeklindedir.

Şimdi elimizdeki $y\sqrt{1 - y'^2} = a$ ve $x - yy' = b$ çözümlerinden y' çekildiğinde bize verilen $yy'' + y'^2 = 1$ denkleminin çözümü,

$$y^2 - (x - b)^2 = a^2 \tag{B.25}$$

şeklinde bulunur.

EK-C

BİRİNCİ MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMİN GENEL TİPİ	**ALTINDA INVARYANT OLDUĞU GRUP**	**İNTEGRASYON ÇARPANI**
$y' = F(x)$ veya $f(x, y') = 0$	$q \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$	$\dfrac{1}{F(x)}$
$y' = F(y)$ veya $f(y, y') = 0$	$p \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x}$	$\dfrac{1}{F(y)}$
$y' = yF(x)$ veya $f\left(x, \dfrac{y'}{y}\right) = 0$	yq	$\dfrac{1}{y}$
$xy' = F(y)$	xp	$\dfrac{1}{xF}$
$y' = F(ax + by)$	$bp - aq$	$\dfrac{1}{a + bF}$
$y' = \phi(x)\psi(y)$	1. $\psi(y)q$, 2. $\dfrac{1}{\phi(x)}p$	$\dfrac{1}{\psi(y)}$
$y' = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ veya M ve N aynı dereceden homojen olmak üzere $Mdx + Ndy = 0$	$xp + yq$	$\dfrac{1}{Mx + Ny}$
$xy' = yF(xy)$ veya $yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$	$xp - yq$	$\dfrac{1}{xy(F+1)}$ veya $\dfrac{1}{xy(f_1 - f_2)}$
$xy' = yF\left(\dfrac{y}{x^n}\right)$	$xp + nyq$	$\dfrac{1}{xy(F - n)}$
$xy' = yF(x^\alpha y^\beta)$	$\beta xp - \alpha yq$	$\dfrac{1}{xy(\beta F + \alpha)}$
$xy' - y = \phi(x)\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$\dfrac{x}{\phi}(xp + yq)$	$\dfrac{1}{x^2 F}$
$xy' - y = \psi(y)\left(\dfrac{y}{x}\right)y'$	$\dfrac{y}{\psi}(xp + yq)$	$\dfrac{1}{y^2 F}$
$xy' + y = \phi(x)F(xy)$	$\dfrac{1}{x\phi}(xp - yq)$	$\dfrac{1}{F}$
$xy' + y = \psi(y)F(xy)y'$	$\dfrac{1}{y\psi}(xp - yq)$	$\dfrac{1}{F}$
$xy' - ny = x^k F\left(\dfrac{y}{x^n}\right)$	$x^{n-k}(xp + nyq)$	$\dfrac{1}{x^{n+1}F}$

$xy' - ay + by^2 = cx^n$	$x^{-a}\left(xp + ayq\right)$	$\dfrac{1}{x^{a+x}\left[c - b\left(\dfrac{y}{x^a}\right)^2\right]}$
$xy' - ny = xy^s y' F\left(\dfrac{y}{x^n}\right)$	$y^{-s}\left(xp + nyq\right)$	$\dfrac{1}{xyF}$
$y' + P(x)\,y = Q(x)$	$e^{-\int P dx} q$	$e^{\int P dx}$
$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^s$	$e^{\int (s-1)P dx} y^s q$	$\dfrac{e^{\int (s-1)P dx}}{y^s}$
$\dfrac{1}{y'} + P(y)\,x = Q(y)$	$e^{-\int P dy} p$	$e^{\int P dy}$
$F\left(x^2 + y^2, \dfrac{y - xy'}{x + yy'}\right) = 0$	$-yp + xq$	$\dfrac{1}{x^2 + y^2}$
$x \pm yy' = \phi(x)\,F\left(x^2 \pm y^2\right)$	$\dfrac{1}{\phi}\left(p \mp \dfrac{x}{y} q\right)$	$\dfrac{1}{F}$
$x \pm yy' = \psi(y)\,F\left(x^2 \pm y^2\right) y'$	$\dfrac{1}{\psi}\left(\dfrac{x}{y} p \mp q\right)$	$\dfrac{1}{F}$
$\dfrac{y^{s-1} y'}{x^{r-1}} = F\left(\dfrac{x^r}{r} \mp \dfrac{y^s}{s}\right) \qquad r, s \neq 0$	$x^{1-r} p \mp y^{1-s} q$	$\dfrac{x^{r-1}}{F \pm 1}$

KAYNAKLAR

1. COHEN, A., An Inroduction To The Lie Theory Of One-Parameter Groups With Applications To The Solutions Of Differantial Equations, D.C. Heath & Co., Publishers, Boston, New York, Chicago, 1911.

2. OLVER, P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, New York Springer-Verlag, 1993.

3. ŞENKON, H., Soyut Cebir Dersleri Cilt II, 2. Baskı, İ.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul 1998.

4. SABUNCUOĞLU, A., Diferansiyel Geometri, 2. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, 2004.

5. PAGE, J.M., Ordinary Differantial Equations An Elementary Text Book With İn İntroduction To Lie's Theory Of The Group Of One Parameter., Macmillan And Co. Limited, London, 1897.

6. BAKER, A., An Introduction to Lie Group Theory, Springer-Verlag, 2002.

7. DRESNER, L., Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1998

8. ERKİP, A.K., İntroduction to Theoretical aspects of ordinary differantial equations. METU, 1996.

9. MILNE, J. S., Group Theory, Available at www.jmilne.org/math/., 1996, 2002.

10. KNAPP A. W., Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Mathematics, Vol. 140. Birkhauser, second edition, 2002.

11. GALLIER, j., Notes On Group Actions, Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104, USA, 2005.

12. FIRK, F. W. K., Introduction to Groups, Invariants and Particles, Professor Emeritus of Physics, Yale University, 2000.

13. GARABEDİAN, P.R., Partial Differantial Equations, New York, USA, 1964.

14. BOYER, C. B., MERZBACH, U. C., History of Mathematics, Second Ed. New York: Wiley, 1998.

15. KLINE, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Pres, New York, 1972.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:**Mehmet ÖZCEYLAN
Doğum Yeri **:**Biga
Doğum Tarihi **:**15.12.1974
Medeni Hali **:**Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul **:**Gerlengeç İlkokulu
Orta Okul **:**Biga Lisesi Orta Kısım
Lise **:**Biga Lisesi
Lisans **:**Trakya Üniversitesi Fen. Ed. Fak. Matematik Bölümü
Yabancı Dil **:** İngilizce

İş Tecrübesi

19.09.2001 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığı Gülpınar Yatılı İlköğretim Bölge Okul'unda Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. Halen bu görevimi sürdürmekteyim.