T.C
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODLAR TOPLAMI YÖNTEMİ İLE SONSUZ SİLİNDİRDEKİ KUANTUM BOŞLUK ENERJİSİ

SEMA BAĞDU MİNEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI

Tez yöneticisi: **Prof..Dr. GÜL MİRZA KERİMOV**

2006 EDİRNE

ÖZET

Bu çalışmada a yarıçaplı iletken sonsuz bir silindir için elektromagnetik alanın kuantum boşluk enerjisi tartışıldı. Casimir enerjisinin anlaşılmasını kolaylaştırmak için bir örnek verildi. Bu örnekte tek boyutta iki levha arasında kütlesiz skaler alanın periyodik sınır şartları ile kuantum boşluk enerjisi ele alındı. Daha sonra Casimir enerjisi için genel bir integral gösterimi ele alındı. Sonraki bölümde silindirik koordinatlarda Maxwell denklemleri çözülerek frekanslar bulundu. Elektromagnetik dalga hızının v olduğu ve elektromagnetik alanın özelliklerinin $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = v^{-2}$ koşuluna uyduğu varsayıldı ve ε_1, μ_1 sırasıyla silindirin permitivi ve permabilitesi, ε_2, μ_2 silindirin permitivi ve permabilitesidir. Bu koşullar sağlandığında silindirin içindeki ve dışındaki modlar arasındaki ıraksamalar Zeta fonksiyonu tekniği kullanılarak ortadan kaldırıldı. Son olarak $\xi^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ olmak üzere $\xi^2 << 1$ ve $\xi^2 = 1$ olduğundaki durumlar göz önüne alınarak silindiriksel kabuğun Casimir enerjisi hesaplandı.

SUMMARY

The quantum vacuum energy of the electromagnetic field for a conducting cylinder of radius a was discussed. An example was given in order to make understanding of Casimir Energy easier. In this example, periodic boundary condition of massless scalar field $\phi(t,x)$ and quantum vacuum energy were studied. Afterwards, a general integral representation for the Casimir energy was studied. In the next step, Maxwell equations were solved in cylindrical coordinates and frequencies were obtained. It was assumed that the electromagnetic characteristics were suitable for the condition $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = v^{-2}$ where v is the speed of the electromagnetic wave and, the permittivity and permeability of the cylinder material are (ε_1, μ_1) and of the surroundings are (ε_2, μ_2). When these conditions were created the divergences between the modes inside and outside the cylinder were eliminated by using Zeta function technique. Finally, Casimir energy of cylindrical shell was calculated considering the cases $\xi^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ and $\xi^2 << 1$ and $\xi^2 = 1$.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda bana yardımcı olan ve her an yeni bir bakış açısı kazandıran değerli hocam Prof. Dr. Gül Mirza KERİMOV' a , değerli hocalarıma,desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen eşim Berk MİNEZ'e ve aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Özet i

Summary ii

1. GİRİŞ 1

2. CASİMİR ETKİSİ VE MODLAR TOPLAMA YÖNTEMİ 5

2.1. Kütlesiz Skaler Alanın Kuantum Boşluk Enerjisi 5
2.2. Casimir Enerjisinin Yol İntegrali ile Hesaplanması 14

3.SİLİNDİRİK DALGALAR 21

3.1. Silindirik Koordinatlarda Maxwell Denklemlerinin Çözümleri 21
3.2. Silindirik Fonksiyonlar ve Onların Özellikleri 28
3.3. Çembersel Silindirde İlerleyen Elektromanyetik Dalgalar 31

4.SONSUZ BİR SİLİNDİRİN CASİMİR ENERJİSİ 36

4.1.Sonsuz Bir Silindirin Casimir Enerjisi için İntegral Temsil 36
4.2. Sonsuz bir Silindirin $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$ Koşulu altında Casimir Enerjisi 38
4.3 Dilute Compact Silindir ve İdeal İletken Silindirik Kabuk 51

SONUÇ 55

Kaynaklar

Özgeçmiş

1 GİRİŞ

Kuantum alanının boşluk enerjisi son yıllarda oldukça ilgi çeken bir konudur. Bu konuya ilişkin olarak öncelikle 'boşluk enerjisi' terimine değinelim. Kuantum alan teorisine göre elektromanyetik alan, sonsuz sayıda harmonik salınıcılar topluluğu olarak düşünülebilir. Kuantum mekaniğinden bilindiği gibi harmonik salınıcın enerji düzeyleri $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ şeklindedir. Burada $n = 0,1,2,...$ ve $\hbar$ plank sabitidir. Buna göre taban durumunda harmonik salınıcın enerjisi $\varepsilon_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ ' dir. Bir başka değişle elektromanyetik alanın en düşük enerjisi (boşluk enerjisi) sıfırdan farklıdır.

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}\sum_{\{p\}}\omega_p \tag{1.1}$$

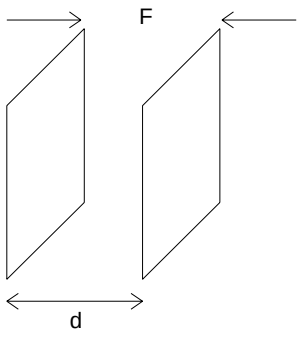
Bu en düşük enerji sıfır nokta enerjisi olarak bilinmektedir. $\{p\}$ (kesikli ve sürekli) kuantum sayıların kümesi olup ele alınan problemin simetrisine uygun olarak seçilir.

Casimir kuvveti boşluktaki (vakum) salınımların en çok tanınmış mekanik etkisidir. Bunu ilk olarak 1948 yılında Hollandalı fizikçi Hendrick Casimir ideal iletken nötr paralel levhaların boşlukta birbirini çektiğini ve bu çekici kuvvetin levhalar belli mesafedeyken elektromanyetik alanın sıfır nokta enerjisindeki değişimden kaynaklandığını düşünmüştür [Casimir, 1948]. Casimir, iki paralel levhanın belirli bir mesafedeyken birbirini çektiğini dolayısıyla, iki paralel levha arasındaki kuvvetin negatif yani çekici bir kuvvet olduğunu gördü. Bu çekici kuvvet

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2\hbar c}{240d^4} \tag{1.2}$$

şeklindedir. [(2.1.42) ile karşılaştırınız.] Burada c ışık hızı ve d levhalar arasındaki mesafe olmak üzere bu kuvvet boşluktaki iki iletken paralel levhanın birim yüzeyine

etki eder(bkz.şekil-1). Bölüm 2'de Casimir enerjisi ile ilgili geniş bir bilgi sunulacaktır. Burada (1.2) bağıntısına kısaca değinelim. (1.1) serisi ıraksak bir seridir. Kuantum alan teorisinde zaman zaman fiziksel büyüklükler ıraksak seriler olarak karşımıza çıkar. Bu durumlarda bile regularizasyon işlemi ile ıraksak seriyi (veya integral) sonlu hale dönüştürür. Renormalizasyon işlemi ise fiziksel bir argümana dayanarak sonlu kısmı sonsuz kısımdan ayrıştırır. Enerji toplanabilir (additive) korunan bir büyüklük olduğu için yalnız bir sabit farkı ile tanımlanabilir. Buna göre tüm fiziksel enerjiler hiçbirşeyin bulunmadığı uzayda (Minkowski uzayında) vakum enerjisi referans alınarak hesaplanabilir. Bir başka değişle Minkowski uzayındaki vakum enerjisini sıfır alabiliriz. Bu argümana dayanarak Casimir (ideal iletken nötr) paralel levhalar bulunduğu durumdaki enerjiyi renormalize ederek (1.2) bağıntısını elde etmiştir.



Şekil-1 Paralel levhalar

Casimir kuvveti birkaç metre uzaklıktaki levhalar için son derece küçük olarak gözlenirken, uzaklık mikron düzeyindeyken ölçülebilir basamaktadır. Örneğin, alanı $1\,cm^2$ ve aradaki uzaklık $1\ \mu m$ olan iki levha yaklaşık 10^{-7} N'luk bir Casimir kuvvetine sahiptir, ki bu kuvvet çapı yarım milimetre olan bir su damlasının ağırlığı kadardır. Casimir etkisiyle ilgili birçok deney vardır. Bunlardan ilki 1958 yılında Sparnaay tarafından deneysel olarak yapılmış $1\,cm^2$ alanında ve $a = 0{,}5\mu m$ levhalar için bu kuvvet $0{,}2\,dyn$ olarak bulunmuştur [Sparnaay, 1958]. Böylelikle Casimir etkisinin gerçek olduğu anlaşılmıştır. Daha sonra 1968 yılında Boyer'in küresel kabuk için yaptığı hesaplamalarda bu çekici kuvvetin tersine itici kuvvet anlamına gelen ve yalnızca kabuğun yarıçapına bağlı pozitif bir sonuç bulunmuştur [Boyer, 1968]. Bu sonuç 1972 yılında B. Davies tarafından yapılan küresel kabuk için Casimir enerjisi

hesabı ile de desteklenmiştir [Davies, 1972]. 1978 yılında ise K. A. Milton, L. L. DeRaad ve J. Schwinger tarafından Green fonksiyon yöntemi ile doğrulanmıştır [Milton at all, 1978]. 70'inci yıllardan başlayarak her yıl bu konuyla ilgili yüzlerce makale yazılmıştır. Casimir enerjisi ile ilgili yayınlanan makalelerin büyük bir kısmı M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostapanenko [Bordag et al, 2001] K. A. Milton [Milton, 2004] ve [Milton, 2006] derlemelerinde yer almaktadır.

Silindir geometrisine yönelik ilk çalışma 1981 yılında ideal iletken silindirik kabuk için L. L. DeRaad ve K. A. Milton tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada 'Green fonksiyonu' kullanılarak Casimir enerjisi hesaplanmıştır [DeRaad and Milton, 1981]. Burada regülarizasyon yöntemi olarak 'kesilim' faktörü kullanılmıştır. Daha sonra 1998 yılında ideal iletken ve sonsuz silindiriksel yüzeyin boşluk enerjisi Godzinsky ve Romeo tarafından hesaplanmıştır[Godzinsky and Romeo, 1998]. Burada regülarizasyon yöntemi olarak zeta fonksiyon yöntemi kullanılmıştır. 1999 yılında K. A. Milton, A. V. Nesterenko ve V. V. Nesterenko tarafından yapılan çalışmada sonsuz bir silindirin elektromagnetik sıfır nokta enerjisi mod toplama yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu çalışmada Casimir enerjisi için genel bir gösterim ele alındıktan sonra $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_1\mu_1 = c^{-2}$ koşulunda silindirin içinde ve dışındaki modlar arasındaki ıraksamalar Zeta fonksiyonu tekniği kullanılarak ortadan kaldırılmış ve $\xi^2 << 1$, $\xi^2 = 1$ olduğu durumlar ele alınarak silindiriksel kabuğun Casimir enerjisi hesaplanmıştır [Milton et al, 1999]. İnez Cavero Pelaez ve K. A. Milton'ın 2004 yılında yayınlanan çalışmalarında dielektrik-diamagnetik silindirin içinde ve dışında farklı hızlara sahip (yani $\varepsilon_1\mu_1 \neq \varepsilon_2\mu_2$ koşulu) bir durum ele alarak Casimir Enerjisini hesaplamışlardır[Pelaez and Milton, 2004]. Bu çalışmada Green fonksiyonu yöntemi kullanılmıştır. 2006 yılında V. V. Nesterenko ve I. G. Pirhozenko sınırlandırılmamış uniform bir ortamda sonsuz compact silindirin Casimir Enerjisini ışık hızı yüzeyden geçerken süreklilik koşulu altında (yani $\varepsilon\mu = c^{-2}$ koşulu) araştırılmış ve bu çalışmada mod toplama metodu kullanılmıştır [Nesterenko and Pirhozenko, 2006]. G. Lambiase, V. V. Nesterenko ile M. Bordag 2006 yılındaki çalışmalarında Zeta fonksiyon tekniğini silindir ve küre için uygulayarak Casimir enerjisini hesaplamışlardır[Lambiase et al, 2006]. August Romeo ve K. A. Milton 2006 yılında Dilute dielektrik silindir için Casimir enerjisini Zeta fonksiyon regularizasyonuyla birlikte mod toplama metodunu kullanarak hesaplamışlardır [Romeo and Milton, 2006].

Casimir enerjisi hesaplarında birkaç yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan en basiti mod toplama yöntemidir. Mod toplama yönteminde Casimir enerjisi ω_p klasik öz frekanslı üzerinden bir toplam olarak gösterilmektedir. Buna göre bu tür hesaplamalarda ilk adım klasik öz frekansların bulunmasıdır. İkinci adım ise regülarizasyon ve renormalizasyon işlemleri kullanılarak sonlu ifadelerin elde edilmesidir.

Bu çalışmada mod toplama metoduyla sonsuz bir silindirin Casimir enerjisini ele alacağız.

İkinci bölümde Casimir etkisinin ve mod toplama yönteminin anlaşılmasını kolaylaştıracak bir örnek olarak tek boyutta iki levha arasında kütlesiz skaler alanın periyodik sınır şartları ile kuantum boşluk enerjisini hesaplayacağız [Bordag et al, 2001]. Ayrıca mod toplama yöntemi kullanılarak Casimir enerjisinin integral gösterimi elde edilecektir.

Üçüncü bölümde silindirik koordinatlarda Maxwell denklemlerinin çözümlerini, silindirik fonksiyonlar ve onların özelliklerini, **ç**embersel silindirde ilerleyen elektromanyetik dalgalar ele alınacaktır.

Dördüncü bölümde elektromanyetik özellikleri $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = v^{-2}$ koşullarına bağlı olduğunu kabul edeceğiz. Bu koşullar sağlandığında silindirin içinde ve dışındaki modlar arasındaki ıraksamaları ortadan kaldıracağız. Bu ıraksamaları zeta fonksiyon tekniği kullanılarak ayrıştıracağız. Daha sonra $\xi^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ olmak üzere $\xi^2 << 1$ ve $\xi^2 = 1$ olduğundaki durumlar göz önüne alarak dilute compact silindirin ve silindiriksel kabuğun Casimir enerjisi hesaplanacaktır.

2. CASİMİR ETKİSİ VE MODLAR TOPLAMA YÖNTEMİ

Bu bölümde tek boyutta iki levha arasında kütlesiz skaler alanın, periyodik sınır şartları ile kuantum boşluk enerjisini hesaplayacağız [Bordag,et al,2001]. Ayrıca Mod toplama yöntemi kullanarak Casimir enerjisinin integral gösterimini elde edeceğiz.

2.1.Kütlesiz Skaler Alanın Kuantum Boşluk Enerjisi

Casimir etkisini silindir geometrisinde hesaplamaya geçmeden önce daha basit bir problemi inceleyerek Casimir etkisinin daha kolay anlaşılmasını sağlayabiliriz. Bunun için tek boyutta iki 'levha' arasında kütlesiz $\phi(t,x)$ skaler alanın kuantum boşluk (vakum) enerjisini hesaplayalım. Levhalar arasındaki uzaklık a olsun. Buna göre periyodik sınır şartları

$$(t,0)=0 \tag{2.1.1}$$

$$(t,a)=0 \tag{2.1.2}$$

olur. Tek boyutta $\phi(t,x)$ skaler alanı

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial x^2}=0 \tag{2.1.3}$$

Klein-Gordon [Sakurai, 1967], [Itzykson and Zuber **,** 1987] denklemini sağlar.
Kuantum alan teorisinde $|0\rangle$ vakum sistemin taban durumu olarak tanımlanır.

$$a_n|0\rangle=0 \quad , \qquad \langle 0|a_n^{+}=0 \tag{2.1.4}$$

Burada a_n^+ ve a_n sırasıyla yaratıcı ve yok edici operatörlerdir. Bu operatörler aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar.

$$\left[a_n, a_{n'}^+\right] = \delta_{n,n'} \quad , \quad \left[a_n, a_{n'}\right] = \left[a_n^+, a_{n'}^+\right] = 0 \tag{2.1.5}$$

Böylece, $\phi(t,x)$ kuantum skaler alanın yaratıcı ve yok edici operatörler cinsinden seri açılımını

$$\phi(t,x) = \sum_n \left[\phi_n^{(-)}(t,x)a_n + \phi_n^{(+)}(t,x)a_n^+\right] \tag{2.1.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\phi_n^{(-)}(t,x)$ ve $\phi_n^{(+)}(t,x)$ Klein-Gordon denkleminin (2.1.1) ve (2.1.2) sınır şartlarını sağlayan ve

$$(f,g) = \frac{i}{c}\int_0^a dx[f^*(\partial_t g) - (\partial_t f^*)g] \tag{2.1.7}$$

iç çarpımına göre ortanormal olan çözümlerdir. $\phi_n^{(-)}(t,x)$ eksi frekanslı çözümler iken $\phi_n^{(+)}(t,x)$ artı frekanslı çözümlerdir

$$\phi_n^{(\pm)}(t,x) = \left(\frac{c}{a\omega_n}\right)^{1/2} e^{\pm i\omega_n t}\sin k_n x \quad . \tag{2.1.8}$$

$$(\phi_n^{(\pm)}, \phi_{n'}^{(\pm)}) = \mp\delta_{nn'} \quad , \quad (\phi_n^{(\pm)}, \phi_{n'}^{(\mp)}) = 0 \tag{2.1.9}$$

Burada

$$\omega_n = ck_n \tag{2.1.10}$$

ve

$$k_n = \frac{\pi n}{a} \quad , \qquad n = 1,2,... \tag{2.1.11}$$

şeklindedir. Belirtelim ki , (2.1.11) bağıntısı (2.1.2) sınır şartından bulunur. Dolayısıyla $\omega_n = \frac{c\pi n}{a}$ frekansları

$$\sin\frac{\omega a}{c} = 0 \tag{2.1.12}$$

denkleminden elde edilir.

Skaler alan için çizgisel Hamiltonyen yoğunluğu

$$H(t,x) = \frac{\hbar c}{2}\left\{\frac{1}{c^2}\left[\partial_t \phi(t,x)\right]^2 + \left[\partial_x \phi(t,x)\right]^2\right\} \tag{2.1.13}$$

olarak tanımlanır. Skaler alanın (2.1.6) ifadesi burada yerine yazılır ve (2.1.5) bağıntısı göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} H = \frac{\hbar c}{2}\sum_n\sum_{n'}\Bigg(&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{n'}^{(-)}}{\partial t} + \frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{n'}^{(-)}}{\partial x}\right)a_n a_{n'} + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_{n'}^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_n^{(+)}}{\partial t} + \frac{\partial\phi_{n'}^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_n^{(+)}}{\partial x}\right)a_n^+ a_{n'} \\ &+ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial t} + \frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial x}\right)a_{n'}^+ a_n + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_n^{(+)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial t} + \frac{\partial\phi_n^{(+)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial x}\right)a_n^+ a_{n'}^+ \\ &+ \delta_{nn'}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial t} + \frac{\partial\phi_n^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{n'}^{(+)}}{\partial x}\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

elde edilir. Şimdi vakum durumunda $\langle 0|H(t,x)|0\rangle$ enerji yoğunluğunu hesaplayalım. Sonuç olarak

$$\langle 0|H(t,x)|0\rangle = \frac{\hbar c}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_n^{(-)}(t,x)}{\partial t}\frac{\partial\phi_n^{(+)}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\phi_n^{(-)}(t,x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_n^{(+)}(t,x)}{\partial x}\right) \tag{2.1.15}$$

bulunur. Burada (2.1.4) bağıntısını kullandık. $\phi_n^{(\pm)}(t,x)$'in (2.1.8) ifadesini (2.1.15)'de yerine yazarsak çizgisel enerji yoğunluğunu

$$\langle 0|H(t,x)|0\rangle = \frac{\hbar c}{2}\left\{\frac{1}{c^2}\sum_n\left(\frac{c}{a\omega_n}\right)\omega_n^2 \sin^2 k_n x + \sum_n\left(\frac{c}{a\omega_n}\right)k_n^2 \cos^2 k_n x\right\} \tag{2.1.16}$$

veya

$$\langle 0|H(t,x)|0\rangle = \frac{\hbar}{2a}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n \tag{2.1.17}$$

elde ederiz. Dolayısıyla çizgisel enerji yoğunluğu (yani birim uzunluğa düşen enerji) noktadan noktaya değişmez olup (2.1.17) bağıntısıyla verilmektedir. Buna göre $(0,a)$ aralığındaki E toplam boşluk enerjisi

$$\begin{aligned} E(a) &= a\langle 0|H(t,x)|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

olarak bulunur. $E(a)$'nın sonsuz olduğu açıkça görülmektedir. Burada $\omega_n = \frac{c\pi n}{a}$ alınırsa

$$E(a) = \frac{\pi c\hbar}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n \tag{2.1.19}$$

olur. (2.1.18) serisini $e^{-\alpha\omega_n}$ gibi bir test fonksiyonu ile regülarize edelim.

$$E^{reg}(a,\alpha) = \frac{\pi c\hbar}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}n} \tag{2.1.20}$$

Burada α renormalizasyon parametresidir. Oran testinden serinin $\alpha > 0$ değerleri için yakınsak olduğu rahatça görülebilir. (2.1.20) bağıntısındaki toplamı bulmak için $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}n}$ geometrik serisi için iyi bilinen

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}n} = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}}}{1-e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}}} \tag{2.1.21}$$

bağıntısının α 'ya göre türevini hesaplayalım. Sonuç

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha\pi c}{a}n} = \frac{1}{4\sinh^2 \frac{\alpha\pi c}{2a}} \tag{2.1.22}$$

olarak belirlenir. Buna göre

$$E^{reg}(a,\alpha) = \frac{\pi\hbar c}{8a} \sinh^{-2} \frac{\alpha\pi c}{2a} \tag{2.1.23}$$

elde ederiz. Doğal olarak $\alpha \to 0$ limitinde boşluk enerjisi sonsuz olarak bulunur. $E^{reg}(a,\alpha)$ 'yı α 'ya göre seriye açalım. Bunun için

$$\sinh^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(\cosh\delta - 1)$$

ve

$$\cosh\delta = 1 + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^4}{4!} + ...$$

bağıntılarını kullanabiliriz. Sonuçta

$$E^{reg}(a,\alpha) = \frac{\pi\hbar c}{8a}\left(\frac{4a^2}{\pi^2 c^2 \alpha^2} - \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha}{a}\right)' \textit{nın pozitif kuvvetleri} \right)$$

$$= \frac{\hbar a}{2\pi c \alpha^2} - \frac{\pi\hbar c}{24a} + \left(\frac{\alpha}{a}\right)' \textit{nın pozitif kuvvetleri} \tag{2.1.24}$$

olarak bulunur. Şimdi 'levhaların' olmadığı durumda yani boş Minkowski uzayında vakum enerjisini hesaplayalım. Bu durumda (2.1.3) Klein-Gordon denkleminin

$$(f,g)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dx[(f^{*}\partial_{t})g-(\partial_{t}f^{*})g] \tag{2.1.25}$$

iç çarpımına göre ortonormal olan artı ve eksi frekanslı çözümleri

$$\phi_{k}^{(\pm)}(t,x)=\left(\frac{c}{4\pi\omega}\right)^{1/2}e^{\pm i(\omega t-kx)} \quad , \tag{2.1.26}$$

$$\omega=c|k| \quad , \qquad -\infty<k<\infty \tag{2.1.27}$$

olarak bulunur. $\phi(t,x)$ alan operatörü ise

$$\phi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\left[\phi_{k}^{(-)}(t,x)a_{k}+\phi_{k}^{(+)}(t,x)a_{k}^{+}\right] \tag{2.1.28}$$

şeklinde tanımlanır. Yaratıcı ve yok edici a_{k}^{+} ve a_{k}^{+} operatörleri

$$\left[a_{k},a_{k'}^{+}\right]=\delta(k-k') \quad , \quad \left[a_{k},a_{k'}\right]=\left[a_{k}^{+},a_{k'}^{+}\right]=0 \tag{2.1.29}$$

bağıntısını sağlamaktadır. Bu operatörler $|0\rangle_{M}$ vakum durumuna etkisi aşağıdaki gibidir.

$$a_{k}|0\rangle_{M}=0 \qquad\qquad {}_{M}\langle 0|a_{k}^{+}=0 \tag{2.1.30}$$

Burada $|0\rangle_{M}$ bir sınır koşulu olmayan Minkowski uzayındaki vakumdur. (2.1.28) bağıntısı (2.1.13) bağıntısında yerine yazılırsa Hamiltonyen yoğunluğu için

$$H=\frac{\hbar c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dk'\left\{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{k'}^{(-)}}{\partial t}+\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{k'}^{(-)}}{\partial x}\right)a_k a_{k'}+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_{k'}^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_k^{(+)}}{\partial t}+\frac{\partial\phi_{k'}^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_k^{(+)}}{\partial x}\right)a_k^{+}a_{k'}\right.$$
$$+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial t}+\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial x}\right)a_{k'}^{+}a_k+\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_k^{(+)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial t}+\frac{\partial\phi_k^{(+)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial x}\right)a_k^{+}a_{k'}^{+}$$
$$\left.+\delta(k-k')\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial t}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial t}+\frac{\partial\phi_k^{(-)}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{k'}^{(+)}}{\partial x}\right)\right\} \qquad (2.1.31)$$

bulunur. $H(t,x)$'in vakum durumu için beklenen değeri hesaplanırsa (2.1.30) bağıntısından dolayı yaratıcı ve yok edici operatörleri içeren terimlerden bir katkı gelmez. Yalnız (2.1.31)'in son teriminden katkı gelir ve sonuç olarak

$$_M\langle 0|H(t,x)|0\rangle_M=\frac{\hbar c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_k^{(-)}(t,x)}{\partial t}\frac{\partial\phi_k^{(+)}(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\phi_k^{(-)}(t,x)}{\partial x}\frac{\partial\phi_k^{(+)}(t,x)}{\partial x}\right) \qquad (2.1.32)$$

bulunur. Burada (2.1.26) bağıntısı yerine yazılırsa vakumun çizgisel enerji yoğunluğunu

$$_M\langle 0|H(t,x)|0\rangle_M=\frac{\hbar}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega dk$$

veya

$$_M\langle 0|H(t,x)|0\rangle_M=\frac{\hbar}{2\pi c}\int_{0}^{\infty}\omega d\omega \qquad (2.1.33)$$

şeklinde bulunacağı kolayca görülebilir.

Belirtelim ki (2.1.33) ifadesi (2.1.18)'den $a\to\infty$ limitinde elde edilebilir, yani

$$_M\langle 0|H(t,x)|0\rangle_M=\lim_{a\to\infty}\langle 0|H(t,x)|0\rangle \qquad (2.1.34)$$

şeklindedir. Gerçekten (bkz. (2.1.10) ve (2.1.11))

$$\omega_n = \frac{\pi n c}{a} \qquad \text{ve} \qquad \Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{c\pi}{a} \tag{2.1.35}$$

bağıntıları göz önünde bulundurulursa (2.1.17) ifadesini

$$\langle 0|H(t,x)|0\rangle = \frac{\hbar}{2\pi c}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n \Delta\omega \tag{2.1.36}$$

şeklinde yazabiliriz. ($n=0$ için $\omega_n = 0$) Şimdi $\langle 0|H(t,x)|0\rangle$'ı $a \to \infty$ limitinde hesaplayalım. $a \to \infty$ limitinde $\Delta\omega \to 0$ olacağından

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}\langle 0|H(t,x)|0\rangle &= \frac{\hbar}{2\pi c}\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n\Delta\omega \\ &= \frac{\hbar}{2\pi c}\int_0^{\infty}\omega d\omega \\ &= {}_M\langle 0|H(t,x)|0\rangle_M \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

şeklinde bulunur ki bu da (2.1.34) bağıntısının doğru olması demektir. Burada belirli integralin tanımını kullandık.

Böylece 'levhaların' olmadığı durumda a aralığına düşen E_M toplam enerji

$$\begin{aligned}E_M &= a\langle 0|H(t,x)|0\rangle \\ &= \frac{\hbar a}{2\pi c}\int_0^{\infty}\omega d\omega \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

olarak bulunur. Iraksak olan bu integrali aynı test fonksiyonu ile regularize edersek

$$\begin{aligned}E_M^{reg}(\alpha) &= \frac{\hbar a}{2\pi c}\int_0^{\infty}\omega e^{-\alpha\omega}d\omega \\ &= \frac{\hbar a}{2\pi c\alpha^2}\end{aligned} \tag{2.1.39}$$

elde ederiz. Not: (2.1.34) bağıntısından dolayı (2.1.39) sonucunu (2.1.24) bağıntısında $a \to \infty$ alarak da hesaplayabilirdik. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} E_M^{reg}(\alpha) &= \lim_{a\to\infty} E^{reg}(a,\alpha) \\ &= E^{reg}(a\to\infty,\alpha) \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

elde edilir. Deneylerde enerji farkı ölçülmektedir. Örneğin, deneyci fizikçiler F Casimir kuvvetini aşağıdaki gibi gözlerler.

$$F = -\frac{\partial E}{\partial a}$$

Doğal olarak hiçbir şeyin bulunmadığı uzayda (Minkowski uzayında) vakum enerjisini sıfır almak en mantıklı seçim olacağından, levhaların arasındaki renormalize edilmiş E^{ren} vakum enerjisini

$$\begin{aligned} E^{ren}(a) &= \lim_{\alpha\to 0}[E^{reg}(a,\alpha) - E_M^{reg}(a,\alpha)] \\ &= \lim_{\alpha\to 0}[E^{reg}(a,\alpha) - E^{reg}(a\to\infty,\alpha)] \end{aligned} \tag{2.1.41}$$

olarak tanımlarız. Buna göre

$$\begin{aligned} E^{ren}(a) &= \lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{\hbar a}{2\pi c\alpha^2} - \frac{\pi\hbar c}{24a} + (\alpha'nin\ pozitif\ kuvvetleri) - \frac{\hbar a}{2\pi c\alpha^2}\right] \\ &= -\frac{\pi\hbar c}{24a} \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

elde ederiz. Burada eksi işareti levhaların birbirlerini çektiklerini gösterir. Levhalar arasındaki çekici kuvvet F

$$F = -\frac{\partial E_0^{ren}(a)}{\partial a} = \frac{\pi\hbar c}{24a^2} \tag{2.1.43}$$

olarak bulunur. Bu kuvvet Casimir kuvveti olarak, bu fenomen ise Casimir etkisi olarak bilinir. (2.1.41) sonucu test fonksiyonundan bağımsız olarak da hesaplanmıştır[Bordag, et al, 2001].

2.2. Casimir Enerjisinin Yol İntegrali ile Hesaplanması

Casimir enerjisinin hesaplanmasında sık sık başvurulan yöntemlerden biri Modlar toplama yöntemidir. Bu yöntemde renormalize edilmiş E Casimir enerji yoğunluğunun (2.1. bölümünde de görüldüğü gibi)

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\{p\}}(\omega_p - \overline{\omega}_p) \quad , \tag{2.2.1}$$

şeklindeki tanımı kullanılmaktadır [(2.1.41) bağıntısı ile karşılaştırın]. Burada ve daha sonra $\hbar = c = 1$ olarak tanımlanmış doğal birimleri (natural units) kullanacağız. Yukarıdaki ifadede ω_p sınır şartları bulunurken klasik öz frekanslar, $\overline{\omega}_p$ ise sınır koşulları bulunmayan ortamdaki klasik öz frekanslardır. $\{p\}$ (kesikli ve sürekli) kuantum sayıların kümesi olup ele alınan problemin simetrisine uygun olarak seçilir. (2.2.1)'deki her iki seri ıraksaktır. Bundan dolayı Casimir enerjisini (2.2.1) bağıntısından hesaplamadan önce bir regularizasyon kullanılması gerekir. Genelde öz frekanslar

$$f(\omega, a) = 0 \tag{2.2.2}$$

denkleminin kökleri olarak bulunur. Burada a sınır koşulunu betimleyen bir parametredir. Ayrıca $\overline{\omega}_p$ frekansı $a \to \infty$ limitinde elde edilir, yani

$$f(\omega, \infty) = 0 \tag{2.2.3}$$

denkleminin kökleri olarak bulunur.(bkz. (2.1.34)) önceki bölümde ele aldığımız örnekte

$$\mathrm{f}(\omega,\mathrm{a}) \equiv \sin\frac{\omega \mathrm{a}}{\mathrm{c}} \tag{2.2.4}$$

ve (2.2.2) denkleminin kökleri kolayca bulunur.

$$\omega_n = \frac{\pi c n}{a} \tag{2.2.5}$$

Fakat çoğu durumda (2.2.2) denkleminin köklerinin bulunması neredeyse imkansızdır. Böyle durumlarda Casimir enerjisini f fonksiyonu cinsinden göstermek oldukça elverişlidir[Nesterenko and Pirozhenko, 1997]. $f(z)$, $z = b_n$ noktalarında birinci mertebeden sıfıra sahip ve kutup noktaları olmayan analitik bir fonksiyon olsun. O halde

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_n b_n \tag{2.2.6}$$

Burada C kapalı yolu b_n noktalarını içine alacak şekilde tanımlanır.

Bu önermeyi doğrulayalım. Yukarıdaki varsayıma göre $z = b_n$ noktaları $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun kutup noktalarıdır. Bu kutup noktalarına karşı gelen rezidüler ise [Bayın, 2000], [Karaoğlu, 1994]

$$\mathrm{Re}\,s\left[z\frac{f'(z)}{f(z)}, b_n \right] = \lim_{z\to b_n}(z-b_n)\frac{f'(z)}{f(z)}z \tag{2.2.7}$$

bağıntısından hesaplanır. Türevin tanımı göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{z\to b_n}\frac{f(z)}{z-b_n}=\lim_{z\to b_n}\frac{f(z)-f(b_n)}{z-b_n}=f'(b_n) \tag{2.2.8}$$

elde ederiz. Burada

$$f(b_n)=0 \tag{2.2.9}$$

olduğunu kullandık. Buna göre (2.2.7) bağıntısından

$$\mathrm{Res}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)},b_n\right]=b_n \tag{2.2.10}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan rezidü teoremine göre [Karaoğlu, 1994], [Bayın, 2000]

$$\begin{aligned}\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz&=2\pi i\sum_n \mathrm{Res}\left[z\frac{f'(z)}{f(z)},b_n\right]\\&=2\pi i\sum_n b_n\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

elde edilir ki, bu da (2.2.6) bağıntısının doğru olduğunu gösterir.

Şimdi (2.2.6) bağıntısını önceki kısımda ele aldığımız kütlesiz skaler alan için (2.1.41) Casimir enerjisinin hesaplanmasında kullanalım. Bu durumda f fonksiyonu (2.2.4) bağıntısı ile verilir.

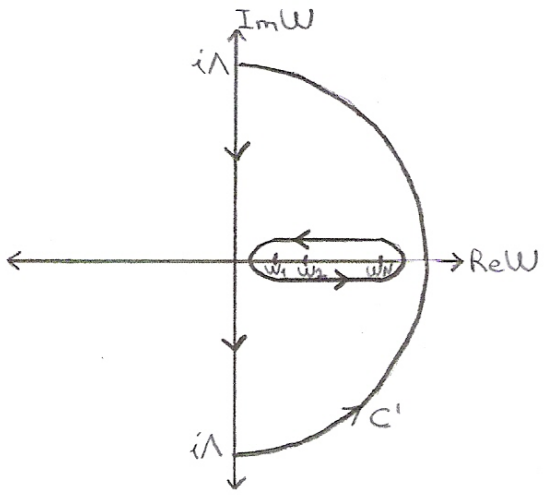
Iraksak serileri regülarize etmek için sonlu toplam alırız. Bunu

$$E^{reg}(a)\equiv\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\omega_n=\frac{a}{4\pi i}\oint_C\omega\frac{\cos(\omega a)}{\sin(\omega a)}d\omega \tag{2.2.12}$$

şeklinde yazarız. Burada C kapalı yolu

$$\sin\omega a=0 \tag{2.2.13}$$

denkleminin yalnız ilk N terimini içermektedir.(bkz. Şekil-2)



Şekil-2 Kompleks Düzlemdeki Kontur İntegrasyonu

İntegrand'ın tekil noktaları reel eksende bulunduğu için C yolunu deforme ederek C' yoluna dönüştürebiliriz. Böylece Λ yarıçapı regülarizasyon parametresi rolünü oynar. Buna göre (2.2.12) bağıntısını

$$E^{reg}(a,\Lambda)=\frac{a}{4\pi i}\oint_{C'}\omega\frac{\cos(\omega a)}{\sin(\omega a)}d\omega \tag{2.2.14}$$

şeklinde yeniden yazarız. (2.1.41) bağıntısını ise

$$E^{ren}(a)=\lim_{\Lambda\to\infty}[E^{reg}(a,\Lambda)-E^{reg}(a\to\infty,\Lambda)] \tag{2.2.15}$$

şeklinde yazarız.

Böylece Casimir enerjisini (2.2.15) bağıntısında hesaplamak için önce sabit Λ değeri için $E^{reg}(a,\Lambda)$'nin $a\to\infty$ asimtotunu bulmak gerekir.

Fakat C' yolunun Λ yarıçaplı yarım çember kısmında integrandın asimptotu kendisi olacağından yarım çember üzerinden integrasyon sonuçları (2.2.15)'deki her iki terim için aynı olur. Buna göre bu sonuçlar birbirlerini götürür ve (2.2.15) ifadesine

yarım çember üzerinden integrasyondan bir katkı gelmez. Buna göre $(-i\Lambda, i\Lambda)$ aralığı üzerinden integrali ele almak yeterlidir.

$$E^{reg}(a,\Lambda) = -\frac{a}{4\pi}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} y\frac{\cosh(ay)}{\sinh(ay)}dy \tag{2.2.16}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\Lambda} yd[\ln(\sinh ay)] \tag{2.2.17}$$

Burada

$$\cos(iya) = \cosh ya$$

$$\sin(iya) = i\sinh ya$$

bağıntılarını kullandık. $E^{ren}(a,\Lambda)$'nın asimptotunu bulmak için (2.2.17) kısmi integrasyon uygulayalım.

$$E^{reg}(a,\Lambda) = -\frac{1}{2\pi}\left\{y\ln\left[\sinh(ay)\right]_0^{\Lambda} - \int_0^{\Lambda} dy\ln\left[\sinh(ay)\right]\right\} \tag{2.2.18}$$

$$= -\frac{\Lambda}{2\pi}\ln\left[\sinh(\Lambda a)\right] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Lambda} dy\ln\left[\sinh(ay)\right] \tag{2.2.19}$$

Burada ($y = 0$ sınırı için) L'Hospital kuralını [Balcı, 1997] kullandık. Şimdi (2.2.19)'de $a \to \infty$ alırsak

$$E^{reg}(a\to\infty,\Lambda) = -\frac{\Lambda}{2\pi}\ln[\sinh(\Lambda a) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Lambda}\ln[\frac{e^{ay}}{2}]dy] \tag{2.2.20}$$

olarak buluruz. (2.2.19) ve (2.2.20) ifadeleri (2.2.15)'de yerine yazılırsa

$$E^{ren}(a) = \lim_{\Lambda\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\Lambda} dy \ln[\sinh(ay)] - \frac{1}{2}\int_0^{\Lambda} dy \ln[\frac{1}{2}e^{ay}]\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^{\Lambda} dy \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{e^{ay}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dy \ln(1 - e^{-2ay}) \qquad (2.2.21)$$

olarak bulunur. Burada kısmi integrasyon uygularsak (2.2.21) bağıntısını

$$E^{ren}(a) = -\frac{a}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{ye^{-2ay}}{1 - e^{-2ay}} dy \qquad (2.2.22)$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Bu integral ise ζ Riemann Zeta fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir. Gerçekten

$$\frac{u}{1-u} = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \qquad (2.2.23)$$

seri açılımının yardımıyla (2.2.22) ifadesi

$$E^{ren}(a) = -\frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} ye^{-2any} dy \qquad (2.2.24)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$t = 2any \qquad (2.2.25)$$

değişken değişimi yapılırsa

$$E^{ren}(a) = -\frac{1}{4\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\infty} e^{-t}dt$$
$$= -\frac{1}{4\pi a}\Gamma(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad (2.2.26)$$

olarak bulunur. Burada Γ gamma fonksiyonunun [Bayın, 2000]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (2.2.27)$$

tanımını kullandık. Böylece

$$E^{ren}(a) = -\frac{1}{4\pi}\zeta(2) \qquad (2.2.28)$$

Burada ζ Riemann zeta fonksiyonu [Bell, 1967]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (2.2.29)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\zeta(2) = \frac{\pi}{6}$ olduğu göz önünde bulundurulursa Casimir enerjisini

$$E^{ren}(a) = -\frac{\pi}{24a} \qquad (2.2.30)$$

olarak buluruz. Bu da beklenen sonuçtur (bkz. (2.1.42)). Burada $\hbar = c = 1$ birimleri kullanmaktadır.

3.SİLİNDİRİK DALGALAR

Bu bölümde silindirik koordinatlarda Maxwell denklemlerinin çözümlerini, silindirik fonksiyonlar ve onların özelliklerini ve **ç**embersel silindirde ilerleyen elektromanyetik dalgaları ele alarak frekans denklemini elde edeceğiz.

3.1 Silindirik Koordinatlarda Maxwell Denklemlerinin Çözümleri

Yük ve akım bulunmayan madde içinde Maxwell denklemleri (MKSA biriminde) [Jackson, 1962]

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)}\ \vec{\nabla}.\vec{D}=0 && \text{(III)}\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ &\text{(II)}\ \vec{\nabla}.\vec{B}=0 && \text{(IV)}\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1)$$

biçiminde yazılır. Burada $\vec{E}$ elektrik alan, $\vec{H}$ manyetik indüksiyonu ve $\vec{D}$'de yer değiştirme alanıdır. Eğer ortam lineer ise

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad , \quad \vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$$

dir. Burada ε ortamın elektriksel geçirgenliği (permitivity) μ ise manyetik geçirgenliğidir (permability). Homojen ortam için ε ve μ sabitleri bir noktadan diğerine değişmez. Bu durumda (3.1.1) denklemleri şöyle olur.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)}\ \vec{\nabla}.\vec{E}=0 & \text{(III)}\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \text{(II)}\vec{\nabla}.\vec{H}=0 & \text{(IV)}\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array}\right\} \qquad (3.1.2)$$

(III) denkleminin her iki tarafının rotasyoneli alınır ve (I), (IV) denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (3.1.3)$$

olarak elde edilir. Burada her $\vec{V}$ vektörü için

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V})=\vec{\nabla}(\nabla.\vec{V})-\nabla^2\vec{V}$$

bağıntısını kullandık [Arfken, 1970]. Benzer şekilde

$$\vec{\nabla}^2\vec{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0 \qquad (3.1.4)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\vec{E}$ ve $\vec{H}$ aynı temel vektör dalga denklemini sağlar

$$\vec{\nabla}^2\vec{V}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2}=0 \quad . \qquad (3.1.5)$$

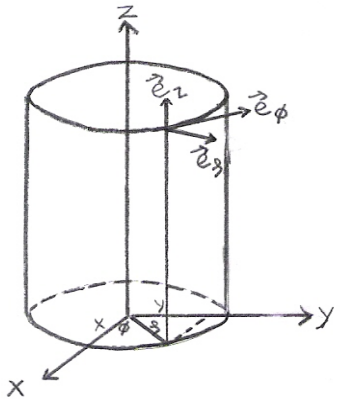
Alanın zamandan bağımlılığının $e^{-i\omega t}$ harmonik çarpan şeklinde olduğunu varsayacağız. Buna göre z yönünde ilerleyen silindirik dalga için (yani z ekseni silindirin simetri eksenidir) ω salınım frekansı olmak üzere elektrik alan ve magnetik alanı

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y)e^{+ik_z z-i\omega t} \qquad (3.1.6)$$

$$\vec{H}(x,y,z,t)=\vec{H}(x,y)e^{+ik_z z-i\omega t} \qquad (3.1.7)$$

şeklinde yazarız. Burada $\vec{E}(x,y)$ ve $\vec{H}(x,y)$ sırasıyla (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerinden bulunur. Bunun için (3.1.3) ve (3.1.4) denklemlerini silindirik koordinatlarda yazalım.

Silindirik koordinatlarda $\vec{E}$ elektrik alanın $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$ ve $\vec{e}_z$ birim vektörlerine açılımı [Arfken, 1970]



Şekil-3- Silindirik koordinatlar

$$\vec{E}(\rho,\phi,z,t) = E_\rho(\rho,\phi,z,t)\vec{e}_\rho + E_\phi(\rho,\phi,z,t)\vec{e}_\phi + E_z(\rho,\phi,z,t)\vec{e}_z \qquad (3.1.8)$$

dir. Laplasyen ise

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ , \qquad (3.1.9)$$

dir. (3.1.8) ve (3.1.9) bağıntısı (3.1.5) dalga denkleminde yerine yazılır ve [Arfken, 1970]

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\phi} = \vec{e}_\phi \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\phi} = -\vec{e}_\rho \quad \text{(diğer benzer türevler sıfırdır)} \qquad (3.1.10)$$

bağıntısı göz önünde bulundurulursa (3.1.3) vektör dalga denklemi aşağıdaki üç skaler denklemi şeklinde yeniden yazılabilir

$$\nabla^2 E_\rho - \frac{1}{\rho^2}E_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad (3.1.11)$$

$$\nabla^2 E_\phi - \frac{1}{\rho^2}E_\phi - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial E_\rho}{\partial\phi} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_\phi}{\partial t^2} = 0 \quad , \qquad (3.1.12)$$

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad . \qquad (3.1.13)$$

Benzer biçimde (3.1.4) denklemini

$$\nabla^2 H_\rho - \frac{1}{\rho^2} H_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_\rho}{\partial t^2} = 0 \quad , \tag{3.1.14}$$

$$\nabla^2 H_\phi - \frac{1}{\rho^2} H_\phi - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial t^2} = 0 \quad , \tag{3.1.15}$$

$$\nabla^2 H_z - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{3.1.16}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece (3.1.13) ve (3.1.16) denklemleri ayrık iken (3.1.11), (3.1.12), (3.1.14), (3.1.15) denklemleri çiftlenimli denklemlerdir. Buna göre $E_\rho, E_\phi, H_\rho, H_\phi$ bileşenlerini (3.1.11), (3.1.12), (3.1.14) ve (3.1.15) denklemlerinden elde etmek zordur. Fakat (3.1.2) denklemini kullanarak bu bileşenleri E_z ve H_z cinsinden yazabiliriz. Bunun için (3.1.2)'deki (III) ve (IV) Maxwell denklemlerini silindirik koordinatlarda yazalım. Her $\vec{V}$ vektörü için[Arfken, 1970]

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\phi & V_z \end{vmatrix} \tag{3.1.17}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial \rho E_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\rho\left(\frac{\partial E_z}{\partial\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial z}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho E_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z \tag{3.1.18}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial \rho H_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\rho\left(\frac{\partial H_z}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial z}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho H_\phi}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z \tag{3.1.19}$$

bulunur. Bu bağıntılar (3.1.2)'deki (III) ve (IV) Maxwell denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu\frac{\partial H_\rho}{\partial t} \tag{3.1.20}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \tag{3.1.21}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \tag{3.1.22}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \varepsilon \frac{\partial E_\phi}{\partial t} \tag{3.1.23}$$

Burada [bkz (3.1.6) ve (3.1.7) bağıntılarına]

$$E_\rho(\rho,\phi,z,t) = E_\rho(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.24}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z,t) = E_\phi(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.25}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z,t) = H_\rho(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.26}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z,t) = H_\phi(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.27}$$

bağıntıları göz önünde bulundurulursa bu denklemler aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} - ik_z H_\phi = -i\varepsilon\omega E_\rho \tag{3.1.28}$$

$$ik_z H_\rho - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = -i\varepsilon\omega E_\phi \tag{3.1.29}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - ik_z E_\phi = i\mu\omega H_\rho \tag{3.1.30}$$

$$ik_z E_\rho - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\mu\omega H_\phi \tag{3.1.31}$$

Bu denklemleri E_ρ, E_ϕ, H_ρ ve H_ϕ'ye göre çözersek

$$E_\rho = \frac{i\omega\mu}{\lambda^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{ik_z}{\lambda^2}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \tag{3.1.32}$$

$$E_\phi = \frac{ik_z}{\lambda^2\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{i\omega\mu}{\lambda^2}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{3.1.33}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{ik^2}{\rho\mu\omega}\frac{\partial E_z}{\partial \phi} + \frac{ik_z}{\lambda^2}\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{3.1.34}$$

$$H_\phi = \frac{ik_z}{\lambda^2\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \frac{ik^2}{\mu\omega\lambda^2}\frac{\partial E_z}{\partial \rho} \tag{3.1.35}$$

olarak buluruz. Burada $\lambda = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ ve $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$ şeklindedir. (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34), (3.1.35) bağıntılarından görüldüğü gibi $E_\rho, E_\phi, H_\rho, H_\phi$'yi E_z ve H_z cinsinden yazılabilir. Şimdi E_z ve H_z için dalga denklemlerini çözelim. (bkz denklem (3.1.13) ve (3.1.16)

$$\nabla^2 E_z - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.36}$$

$$\nabla^2 H_z - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.37}$$

Öncelikle (3.1.36) denkleminden E_z için dalga denklemini

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.38}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. Burada (3.1.6) ve (3.1.7) bağıntıları göz önünde bulundurulduğunda E_z ve H_z

$$E_z(\rho,\phi,z,t) = E_z(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.39}$$

$$H_z(\rho,\phi,z,t) = H_z(\rho,\phi)e^{ik_z z - i\omega t} \tag{3.1.40}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.39) bağıntısını göz önünde bulundurduğumuzda (3.1.38) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + (k^2 - k_z^2)E_z = 0 \tag{3.1.41}$$

Burada $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$ şeklindedir. (3.1.41) denklemini değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözersek $E_z(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ olarak aldığımızda

$$\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+(k^2-k_z^2)=0 \qquad (3.1.42)$$

elde edilir. Burada $\Phi(\phi)$ ve $R(\rho)$ için

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+p^2\Phi(\phi)=0$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)+[(k^2-k_z^2)\rho^2-p^2]R(\rho)=0 \qquad (3.1.43)$$

şeklinde iki denklem elde edilir. Burada p^2 bir ayrılma sabitidir. E_z'nin tek değerli olabilmesi için $E_z(\rho,\phi+2\pi,z,t) = E_z(\rho,\phi,z,t)$ olmalıdır. Bu koşulun sağlanabilmesi için p değerinin sıfır veya tamsayı olması gerekir, yani $p = n$, $n = 0,\pm1,\pm2...$ şeklindedir. (3.1.43) denklemi ise Bessel denklemidir

$$\frac{d^2R}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dR}{dy}+\left(1-\frac{n^2}{y^2}\right)R=0 \quad . \qquad (3.1.44)$$

Burada $y = \lambda\rho$ değişken değişimi yaptık. Böylelikle (3.1.39) özel çözümü

$$E_z(\rho,\phi,z,t) = Z_n(\lambda\rho)e^{ik_z z+in\phi-i\omega t} \qquad (3.1.45)$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = \sqrt{k^2-k_z^2}$ şeklindedir. Burada Z_n Bessel denkleminin bir özel çözümüdür ve daha sonra tanımlayacağız. Benzer şekilde H_z için

$$H_z(\rho,\phi,z,t) = Z_n(\lambda\rho)e^{ik_z z+in\phi-i\omega t} \qquad (3.1.46)$$

elde edilir.

3.2 Silindirik Fonksiyonlar ve Onların Özellikleri

Bu kısımda ilk olarak Bessel fonksiyonları ile ilgili bazı bilgiler vereceğiz [Bell, 1967], [Arfken,1970]. Daha sonra söz konusu Z_n özel çözümünü elde edeceğiz.

Bessel denklemini

$$\frac{d^2 Z_p}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ_p}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) Z_p = 0 \tag{3.2.1}$$

şeklinde yazabiliriz. p 'nin tamsayı olmadığı durumlarda $J_p(\rho)$ ve $J_{-p}(\rho)$ birinci tür Bessel fonksiyonları (3.2.1)denkleminin iki lineer bağımsız çözümleridir. Bessel fonksiyonu (p 'nin ve ρ 'nun hem reel hem de kompleks değerleri için)

$$J_p(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{p+2m} \tag{3.2.2}$$

şeklinde tanımlanır. p 'nin tamsayı değerler aldığı zaman ise iki çözüm birbirine

$$J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho) \tag{3.2.3}$$

ilişkisi ile bağlıdır. Bessel denkleminin iki bağımsız çözümü p 'nin tüm değerleri için $J_p(\rho)$ $N_p(\rho)$ ile verilebilir. İkinci türden $N_p(\rho)$ Bessel fonksiyonu da aşağıdaki bağıntıyla belirlenir.

$$N_p(\rho) = \frac{1}{\sin p\pi}[J_p(\rho)\cos p\pi - J_{-p}(\rho)] \tag{3.2.4}$$

ρ yeterince büyük olduğunda yani $\rho \to \infty$ için davranışları

$$J_n(\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right) , \qquad (3.2.5)$$

$$|\rho| >> 1$$

$$N_n(\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right) . \qquad (3.2.6)$$

şeklindedir. $\rho \to 0$ limitinde ise

$$J_n(\rho) \cong \frac{1}{n!}\left(\frac{\rho}{2}\right)^n \qquad (3.2.7)$$

$$N_n(\rho) \cong \frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \qquad (3.2.8)$$

şeklindedir. Üçüncü tür Bessel fonksiyonları da denilen Hankel fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$H_n^{(1)}(\rho) = J_n(\rho) + iN_n(\rho) \qquad (3.2.9)$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = J_n(\rho) - iN_n(\rho) \qquad (3.2.10)$$

ρ yeterince büyük olduğunda yani $\rho \to \infty$ için

$$H_n^{(1)}(\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} , \qquad (3.2.11)$$

$$|\rho| >> 1$$

$$H_n^{(2)}(\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left(\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} , \qquad (3.2.12)$$

şeklindedir.Son olarak belirtelim ki (3.2.6) bağıntısından Bessel fonksiyonunun sonsuz sayıda kökü olacağı açıktır.

$J_n(\rho_{nl}) = 0 \quad , \quad l = 1,2,3,...$

Burada ρ_{nl}, n. dereceden Bessel fonksiyonunun l. kökünü göstermektedir. Şimdi (3.1.44) denklemine dönelim. Bu denklemin $\rho < a$ $(y < \lambda a)$ bölgesi için ve $\rho > a$ $(y > \lambda a)$ bölgesi için özel çözümleri bulalım. Denklemin genel çözümlerini

$$R(y) = AJ_n(y) + BN_n(y) \quad , \quad y = \lambda\rho \tag{3.2.13}$$

olarak yazabiliriz. $\rho < a$ bölgesi $\rho = 0$ noktasını içerdiğinde (3.2.8), (3.2.9)bağıntılarına göre bu bölgede sonlu çözüm $B = 0$ koşulunu gerektirir. Dolayısıyla

$$R(\lambda\rho) = AJ_n(\lambda\rho) \qquad \rho < a \tag{3.2.14}$$

$\rho > a$ bölgesi için çözümü elde etmek için (3.2.13) bağıntısının $\rho \to \infty$ limitinde davranışını inceleyelim. (3.2.5) ve (3.2.6) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$R(\lambda\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left[A\cos\left(\lambda\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + B\sin\left(\lambda\rho - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right] \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Burada

$$R(\lambda\rho) \sim e^{i\lambda\rho} \qquad , \qquad \rho \to \infty \text{ iken} \tag{3.2.16}$$

sınır koşulu göz önüne alınırsa $B = iA$ olarak bulunur. Buna göre (3.2.13) bağıntısından

$$R(\lambda\rho) = CH_n^{(1)}(\lambda\rho) \qquad , \qquad \rho > a \text{ için} \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Burada (3.2.11) bağıntısını göz önüne aldık. (C bir sabittir.)

3.3. Çembersel Silindirde İlerleyen Elektromanyetik Dalgalar

Bölüm 3.2.de elde edildiği gibi $\rho < a$ bölgesi için (3.1.44) denkleminin çözümü J_n ile ifade edilirken $\rho > a$ bölgesi için ise $H_n^{(1)}$ ile ifade edilir. Sonsuz homojen bir ortama sonsuz uzunlukta ve a yarıçaplı çembersel bir silindiri yerleştirilmiştir. Silindirin dalga sayısı k_1 ve dış ortamınki de k_2 'dir. Öyleyse (3.1.45) ve (3.1.46) denklemindeki Z_n [Stratton, 1941]

$$Z_n(\lambda_j\rho) = \begin{cases} J_n(\lambda_j\rho) & \rho < a \\ H_n^{(1)}(\lambda_j\rho) & \rho > a \end{cases} \tag{3.3.1}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bunu göz önünde bulundurup E_z^i, E_z^e, H_z^i ve H_z^e genel olarak yazdığımızda

$$E_z^i(\rho,\phi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^i J_n(\lambda_j\rho) e^{ik_z z + in\phi - i\omega t} \qquad \rho < a \ , \tag{3.3.2}$$

$$E_z^e(\rho,\phi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^e H_n{}^{(1)}(\lambda_j\rho) e^{ik_z z + in\phi - i\omega t} \qquad \rho > a \ , \tag{3.3.3}$$

$$H_z^i(\rho,\phi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^i J_n(\lambda_j\rho) e^{ik_z z + in\phi - i\omega t} \qquad \rho < a \ , \tag{3.3.4}$$

$$H_z^e(\rho,\phi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^e H_n{}^{(1)}(\lambda_j\rho) e^{ik_z z + in\phi - i\omega t} \qquad \rho > a \ , \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Burada $\vec{E}^i$ silindirin iç kısmındaki $\vec{E}^e$ ise silindirin dış kısmındaki elektrik alanı, $\vec{H}^i$ silindirin iç kısmındaki ve $\vec{H}^e$ silindirin dış kısmındaki magnetik alanı temsil eder. Bunları (3.1.32), (3.1.33), (3.1.34) ve (3.1.35) bağıntılarında yerine yazarsak E_ρ, E_ϕ, H_ρ ve H_ϕ ve $\rho < a$ için aşağıdaki bağıntıları elde ederiz.

$$E_{\rho}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik_z}{\lambda_1} J_n^{'}(\lambda_1 \rho) a_n^i h_n - \frac{\mu_1 \omega n}{\lambda_1^2 \rho} J_n(\lambda_1 \rho) b_n^i h_n \right\}, \tag{3.3.6}$$

$$E_{\phi}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{nk_z}{\lambda_1^2 \rho} J_n(\lambda_1 \rho) a_n^i h_n - \frac{i\mu_1 \omega}{\lambda_1} J_n^{'}(\lambda_1 \rho) b_n^i h_n \right\}, \tag{3.3.7}$$

$$E_{z}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda_1 \rho) a_n^i h_n \,, \tag{3.3.8}$$

$$H_{\rho}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{nk_1^2}{\rho \mu_1 \omega \lambda_1^2} J_n(\lambda_1 \rho) a_n^i h_n + \frac{ik_z}{\lambda_1} J_n^{'}(\lambda_1 \rho) b_n^i h_n \right\}, \tag{3.3.9}$$

$$H_{\phi}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik_1^2}{\mu_1 \omega \lambda_1} J_n^{'}(\lambda_1 \rho) a_n^i h_n - \frac{nk_z}{\lambda_1^2 \rho} J_n(\lambda_1 \rho) b_n^i h_n \right\}, \tag{3.3.10}$$

$$H_{z}^{i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda_1 \rho) b_n^i h_n \,, \tag{3.3.11}$$

Burada h_n

$$h_n = e^{ik_z z + in\phi - i\omega t} \tag{3.3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Hatırlatalım ki $\vec{E}^{\,i}$ silindirin iç kısmındaki $\vec{E}^{\,e}$ ise silindirin dış kısmındaki elektrik alanı temsil eder. Aynı şekilde $\vec{H}^{\,i}$ silindirin iç kısmındaki ve $\vec{H}^{\,e}$ silindirin dış kısmındaki magnetik alanı temsil eder. Silindirin iç kısmındaki ortamın permitivi ve permabilitesi ε_1, μ_1 ve dış kısmının ki de ε_2, μ_2 dir. Aynı şekilde $\rho > a$ için

$$E_{\rho}^{e} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik_z}{\lambda_2} H_n^{(1)^{'}}(\lambda_2 \rho) a_n^e h_n - \frac{\mu_2 \omega n}{\lambda_2^2 \rho} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) b_n^e h_n \right\} \tag{3.3.13}$$

$$E_{\phi}^{e} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{nk_z}{\lambda_2^2 \rho} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) a_n^e - \frac{i\mu_2 \omega}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 \rho) b_n^e \right\} \tag{3.3.14}$$

$$E_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) a_n^e h_n \tag{3.3.15}$$

$$H_{\rho}^{e} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{nk_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2^2 \rho} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) a_n^e h_n + \frac{ik_z}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 \rho) b_n^e h_n \right\} \tag{3.3.16}$$

$$H_{\phi}^{e} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 \rho) a_n^e h_n - \frac{nk_z}{\lambda_2^2 \rho} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) b_n^e h_n \right\} \tag{3.3.17}$$

$$H_z^e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(\lambda_2 \rho) b_n^e h_n \tag{3.3.18}$$

elde edilir. Burada ki a_n^i, b_n^i, a_n^e, b_n^e katsayıları sınır koşulundan elde edilir. Sınır koşulu ise

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}^{e} - \vec{E}^{i} \right)\Big|_{\rho=a} = 0 \tag{3.3.19}$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}^{e} - \vec{H}^{i} \right)\Big|_{\rho=a} = 0 \tag{3.3.20}$$

şeklindedir. $\rho = a$ sınırında $\vec{E}$ ve $\vec{H}$'ın tanjantyel bileşenleri süreklidir ve (3.3.19), (3.3.20) şeklindedir. (3.3.19) ve (3.3.20)'den

$$E_{\phi}^{e} - E_{\phi}^{i} = 0 \ , \quad E_z^e - E_z^i = 0 \ ,$$

$$H_{\phi}^{e} - H_{\phi}^{i} = 0 \ , \quad H_z^e - H_z^i = 0$$

elde edilir. Bu bağıntılardan aşağıdaki denklemler sistemi elde edilir

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{nk_z}{(\lambda_2 a)^2}H_n^{(1)}(\lambda_2 a)a_n^e+\frac{i\mu_2\omega}{\lambda_2 a}H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)b_n^e\right)-\left(\frac{nk_z}{(\lambda_1 a)^2}J_n(\lambda_1 a)a_n^i+\frac{i\mu_1\omega}{\lambda_1 a}J'_n(\lambda_1 a)b_n^i\right)=0\\
&H_n^{(1)}(\lambda_2 a)a_n^e-J_n(\lambda_1 a)a_n^i=0\\
&\left(\frac{ik_2^2}{\mu_2\omega\lambda_2 a}H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)a_n^e-\frac{nk_z}{\lambda_2 a^2}H_n^{(1)}(\lambda_2 a)b_n^e\right)-\left(\frac{ik_1^2}{\mu_1\omega\lambda_1 a}J'_n(\lambda_1 a)a_n^i-\frac{nk_z}{(\lambda_1 a)^2}J_n(\lambda_1 a)b_n^i\right)=0\\
&H_n^{(1)}(\lambda_2 a)b_n^e-J_n(\lambda_1 a)b_n^i=0\quad .
\end{aligned}\right\}\text{(3.3.21)}$$

Burada J'_n ve $H_n^{(1)'}$ ρ'ya göre türevi ifade eder. Dolayısıyla a_n^i, b_n^i, a_n^e, b_n^e katsayıları (3.3.21) homojen lineer bağıntı sistemini sağlar. Bu sistem yalnızca (3.3.21) denkleminin determinantının sıfır olduğu durumda a_n^i, b_n^i, a_n^e, b_n^e katsayıları için sıfırdan farklı bir çözüm elde edilir. Yani

$$\begin{vmatrix}
\frac{nk_z}{u^2}J_n(\lambda_1 a) & \frac{i\omega\mu_1}{u}J_n^{'}(\lambda_1 a) & \frac{nk_z}{\gamma^2}H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) & \frac{i\mu_2\omega}{\gamma}H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)\\
J_n(\lambda_1 a) & 0 & H_n^{(1)}(\lambda_2 a) & 0\\
\frac{ik_1^2}{\mu_1\omega u}J_n^{'}(\lambda_1 a) & -\frac{nk_z}{u^2}J_n(\lambda_1 a) & \frac{ik_2^2}{\mu_2\omega\gamma}H_n^{(1)}(\lambda_2 a) & \frac{-nk_z}{\gamma^2}H_n^{(1)}(\lambda_2 a)\\
0 & J_n(\lambda_1 a) & 0 & H_n^{(1)}(\lambda_2 a)
\end{vmatrix}=0$$

determinantından

$$\left[\frac{\mu_1}{\lambda_1 a}\frac{J_n^{'}(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_1 a)}-\frac{\mu_2}{\lambda_2 a}\frac{H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)}{H_n^{(1)}(\lambda_2 a)}\right]\left[\frac{k_1^2}{\mu_1\lambda_1 a}\frac{J_n^{'}(\lambda_1 a)}{J_n(\lambda_1 a)}-\frac{k_2^2}{\mu_2\lambda_2 a}\frac{H_n^{(1)'}(\lambda_2 a)}{H_n^{(1)}(\lambda_2 a)}\right]=n^2k_z^2\left(\frac{1}{(\lambda_2 a)^2}-\frac{1}{(\lambda_1 a)^2}\right)^2 \tag{3.3.22}$$

denklemini elde ederiz. Bu ifadeyi ortak paranteze alıp düzenlediğimizde

$$f_n(k_z,\omega,a)=0 \tag{3.3.23}$$

elde ederiz. Burada

$$f_n = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a)\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) - n^2 \omega^2 k_z^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2)^2 \left[J_n(\lambda_1 a) H_n(\lambda_2 a)\right]^2 \tag{3.3.24}$$

şeklindedir. $\Delta_n^{TM}, \Delta_n^{TE}$ aşağıdaki gibidir.

$$\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\varepsilon_1 \lambda_2 J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) - a\varepsilon_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \quad , \tag{3.3.25}$$

$$\Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\mu_1 \lambda_2 J_n'(\lambda_1 a) H_n^{(1)}(\lambda_2 a) - a\mu_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \tag{3.3.26}$$

verilen her k_z ve n değeri için (3.3.23) denkleminin sonsuz sayıda kökleri mevcuttur. Bu kökleri $\omega_{nl}(k_z)$, $l = 1,2,...$ şeklinde göstereceğiz.

4.SONSUZ BİR SİLİNDİRİN CASİMİR ENERJİSİ

Bu bölümde elektromanyetik özelliklerin $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = v^{-2}$ koşuluna bağlı olduğu durumu yani silindirin içinde ve dışında elektromanyetik dalgaların hızının aynı olduğu durumu, $\xi^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$ olmak üzere $\xi^2 \langle\langle 1$ ve $\xi^2 = 1$ durumlarını ele alacağız [DeRaad and Milton, 1981], [Godzinsky and Romeo, 1998], [Milton et al, 1999], [Pelaez and Milton, 2004], [Nesterenko and Pirhozenko, 2006], [Lambiase et al, 2006], [Romeo and Milton, 2006].

4.1.Sonsuz Bir Silindirin Casimir Enerjisi için İntegral Temsili

Bu bölümde aşağıdaki problemi ele alacağız. Yarıçapı a olan çembersel silindir sınırsız tek biçimli (uniform) ortama koyulmuştur. Silindir maddesinin permitivi ve permabilitesi, sırasıyla ε_1 ve μ_1, ortamın permitivi ve permabilitesi sırasıyla ε_2 ve μ_2 olsun. Her iki ortamın öz iletkenliğinin sıfır olduğunu düşünelim. Biz bu silindirin birim boyutuna düşen E Casimir enerjisini mod toplamı yöntemi ile (bkz. bölüm 2.2) hesaplamak istiyoruz.

$$E = \frac{1}{2}\sum_{\{p\}}(\omega_p - \overline{\omega}_p) \tag{4.1.1}$$

Burada ω_p silindirin bulunduğu durum için frekanslar iken $\overline{\omega}_p$ silindirin bulunmadığı durum için frekanslardır. ω_p frekansları (3.3.23) denkleminden, yani

$$f_n(k_z, \omega, a) = 0 \tag{4.1.2}$$

denkleminden elde edilir. Burada

$$f_n = \lambda_1^2\lambda_2^2\Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a)\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) - n^2\omega^2 k_z^2(\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)^2\left[J_n(\lambda_1 a)H_n(\lambda_2 a)\right]^2 \tag{4.1.3}$$

olarak tanımlanmaktadır. $\Delta_n^{TM}, \Delta_n^{TE}$ aşağıdaki şekildedir

$$\Delta_n^{TM}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\varepsilon_1 \lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 a) H_n(\lambda_2 a) - a\varepsilon_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{'}(\lambda_2 a) \tag{4.1.4}$$

$$\Delta_n^{TE}(\lambda_1 a, \lambda_2 a) = a\mu_1 \lambda_2 J_n^{'}(\lambda_1 a) H_n(\lambda_2 a) - a\mu_2 \lambda_1 J_n(\lambda_1 a) H_n^{(1)'}(\lambda_2 a) \ . \tag{4.1.5}$$

Burada $\lambda_i = k_i^2 - k_z^2$, $k_i^2 = \varepsilon_i \mu_i \omega^2$, $i = 1,2$, $n = 0,\pm 1,\pm 2,...$ (4.1.2) denkleminin kökleri $\omega_{nl}(k_z)$ olduğundan p olarak k_z, n, l almak gerekir. Burada k_z, n ve l aşağıdaki değerleri almaktadır.

$$-\infty < k_z < \infty \ , \qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,... \ , \qquad l = 1,2,3 \tag{4.1.6}$$

Buna göre (4.1.1) bağıntısı

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\omega_{nl}(k_z) - \overline{\omega}_{nl}(k_z) \right] \tag{4.1.7}$$

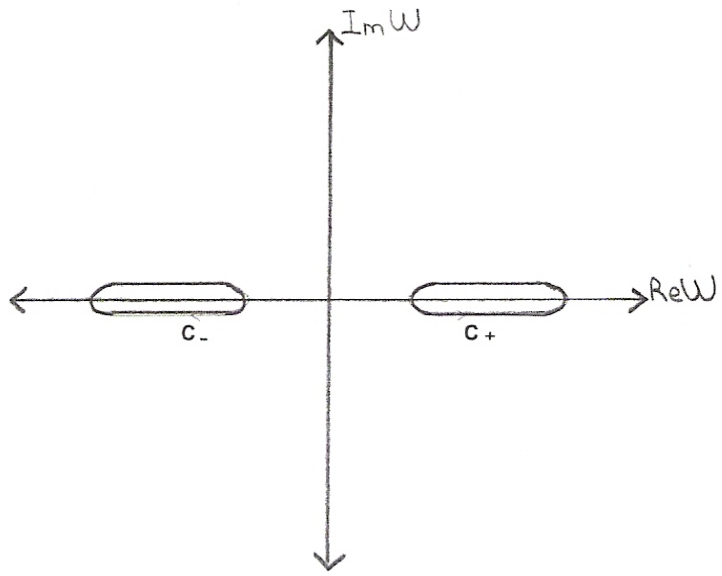
şeklini alır. Burada $\overline{\omega}_{nl}(k_z)$ frekansları $a \to \infty$ limitinde hesaplanır. (2.2.6) bağıntısı göz önüne alınarak (4.1.7) bağıntısını

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \oint_C \omega d_\omega \ln \frac{f_n(k_z, \omega, a)}{f_n(k_z, \omega, \infty)} \tag{4.1.8}$$

şeklinde yazarız. Burada

$$\frac{F'(z)}{F(z)} dz = d \ln F(z)$$

bağıntısını kullandık. Kompleks ω düzlemindeki $C = C_- + C_+$ yolu iki kısımdan oluşmaktadır: C_- yolu (4.1.2) denkleminin eksi köklerini saat ibrelerinin dönme yönünde çevrelerken, C_+ ise artı kökleri ters yönde çevrelemektedir (bkz şekil-4).



Şekil-4 Kompleks Düzlemdeki Kontur İntegrali

4.2. Sonsuz bir Silindirin $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$ Koşulu altında Casimir Enerjisi

Çok karmaşık olan $f_n(k_z,\omega,a)$ fonksiyonunu basitleştirmek için (ε_1,μ_1) ve (ε_2,μ_2) büyüklükleri arasında

$$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2 = v^{-2} \tag{4.2.1}$$

bağıntısının sağlandığını varsayacağız. Burada v her iki ortamdaki ışık hızıdır. Bir başka değişle her iki ortamdaki ışık hızının aynı olduğunu varsayacağız. Bu durumda

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \tag{4.2.2}$$

$$f_n(k_z,\omega,a) = \Delta_n^{TE}(\lambda,a)\Delta_n^{TM}(\lambda,a) \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\Delta_n^{TE}(\lambda,a) = \lambda a\left[\mu_1 J_n'(\lambda a)H_n(\lambda a) - \mu_2 J_n(\lambda a)H_n'(\lambda a)\right] \tag{4.2.4}$$

$$\Delta_n^{TM}(\lambda,a) = \lambda a\left[\varepsilon_1 J_n'(\lambda a)H_n(\lambda a) - \varepsilon_2 J_n(\lambda a)H_n'(\lambda a)\right] \tag{4.2.5}$$

dir. Böylece (4.1.2) denklemi iki denkleme ayrışmaktadır.

$$\Delta_n^{TE}(\lambda a) = 0 \tag{4.2.6}$$

$$\Delta_n^{TM}(\lambda a) = 0 \tag{4.2.7}$$

Hatırlatalım ki, λ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2 \tag{4.2.8}$$

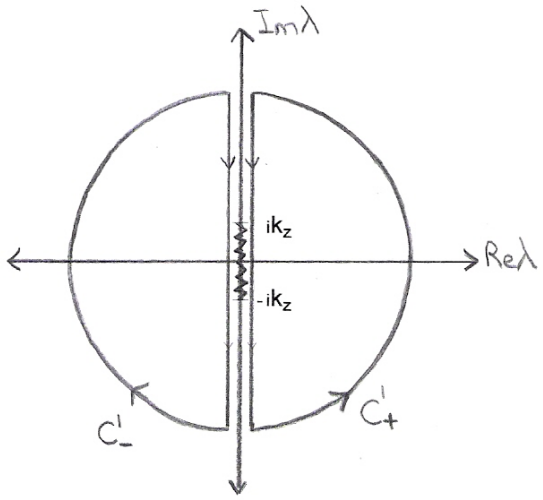
$f_n(k_z, \omega, a)$ fonksiyonunun (4.2.3) ifadesi (4.1.8)'de yerine yazılır ve

$$\omega^2 = v^2(\lambda^2 + k_z^2) \tag{4.2.9}$$

şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılırsa Casimir enerjisini şeklinde yazabiliriz.

$$E = -\frac{v}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\oint_{C^I}\sqrt{\lambda^2 + k_z^2}\,d_\lambda \ln\frac{\Delta_n^{TE}(\lambda a)\Delta_n^{TM}(\lambda a)}{\Delta_n^{TE}(\infty)\Delta_n^{TM}(\infty)} \tag{4.2.10}$$

Burada C kapalı yolu şekil-5'de görüldüğü gibi $C' = C'_+ + C'_-$ yolu ile değiştirilmiştir.



Şekil-5 Kompleks Düzlemdeki Kontur İntegrali

Her iki yarı çember üzerinde (4.2.10)'deki logaritma fonksiyonu 1'e yaklaşmaktadır. Bundan dolayı C' yolunun bu kısmı (4.2.10) integraline bir katkıda bulunmaz. İmajiner eksen boyunca integrali hesaplarken

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + k_z^2} \tag{4.2.11}$$

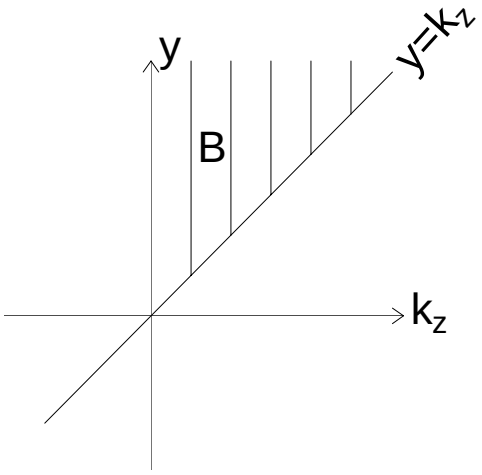
fonksiyonunun aşağıdaki şekilde tanımlanmış dalını seçelim

$$\varphi(iy) = \begin{cases} i\sqrt{y^2 - k_z^2} & , \quad y > k_z \\ \pm\sqrt{k_z^2 - y^2} & , \quad |y| < k_z \\ -i\sqrt{y^2 - k_z^2} & , \quad y < -k_z \end{cases} \tag{4.2.12}$$

Burada $k_z > 0$, $y = \operatorname{Im}\lambda$ ve kesiğin sağında iken +, solunda iken – işareti alınmaktadır. Böylece C'_+ ve C'_- 'nin $(-ik_z, ik_z)$ kısmından gelen katkılar birbirlerini götürür ve

$$E = -\frac{v}{2\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} dk_z \int_{k_z}^{\infty} \sqrt{y^2 - k_z^2}\, d_y \ln\frac{\Delta_n^{TE}(iay)\Delta_n^{TM}(iay)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{4.2.13}$$

olarak bulunur. İntegrasyon bölgesi $B = \{(k_z, y) : 0 \le k_z \le \infty,\ k_z \le y \le \infty\}$ şekil-6 'da gösterilmiştir.



Şekil-6 İntegrasyon Bölgesi

Burada, $B = \{(k_z, y) : 0 \le y \le \infty,\ 0 \le k_z \le y\}$ olduğu göz önüne alınarak integralin sırası değiştirilir ve

$$\int_0^y dk_z \ \sqrt{y^2 - k_z^2} = \frac{\pi}{4} y^2 \tag{4.2.14}$$

bağıntısı kullanılırsa

$$E = -\frac{v}{8\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y^2 d_y \ \ln \frac{\Delta_n^{TE}(iy)\Delta_n^{TM}(iy)}{\Delta_n^{TE}(i\infty)\Delta_n^{TM}(i\infty)} \tag{4.2.15}$$

elde edilir. Burada $y' = ay$ değişken değişimi yaptık ve daha sonra y' yerine y yazdık. (4.2.15)'deki logaritmalı kısmın hesabı için Modifiye Bessel fonksiyonlarını ve asimptotik davranışlarını kullanmalıyız. Modifiye Bessel fonksiyonları $I_n(y)$ ve $K_n(y)$ [Bell, 1967]

$$I_n(y) = i^{-n} J_n(iy) \tag{4.2.16}$$

$$K_n(y) = i^{n+1} \frac{\pi}{2} H_n(iy) \tag{4.2.17}$$

şeklindedir. n sabit iken, $y \to \infty$ için (4.2.16) ve (4.2.17)'ün asimptotik davranışları

$$I_n(y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \quad , \quad I_n'(y) \approx \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \tag{4.2.18}$$

$$K_n(y) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \quad , \quad K_n'(y) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \tag{4.2.19}$$

şeklindedir. (4.2.18) ve (4.2.19)'u (4.2.16) ve (4.2.17)'de yerine yazarsak

$$J_n(iy) = i^n \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \tag{4.2.20}$$

$$J_n'(iy) = i^n \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \tag{4.2.21}$$

$$H_n(iy) = i^{-(n+1)} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \tag{4.2.22}$$

$$H_n'(iy) = -i^{-(n+1)} \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y} \tag{4.2.23}$$

Bunları $\Delta n^{TE}(\lambda)$ denkleminde yerine yazdığımızda $\lambda = iy$ için,

$$\Delta n^{TE}(iy) = \frac{2y}{\pi} \left\{ \mu_1 I_n{}'(y) K_n(y) + \mu_2 I_n(y) K_n{}'(y) \right\} \tag{4.2.24}$$

elde ederiz. Ayrıca $\Delta n^{TE}(i\infty)$

$$\Delta n^{TE}(i\infty) = (\mu_1 + \mu_2) \frac{1}{\pi} \tag{4.2.25}$$

şeklindedir ve (4.2.24) ile (4.2.25) oranı

$$\frac{\Delta n^{TE}(iy)}{\Delta n^{TE}(i\infty)} = \frac{2y}{(\mu_1 + \mu_2)} \left\{ \mu_1 I_n{}'(y) K_n(y) - \mu_2 I_n(y) K_n{}'(y) \right\} \tag{4.2.26}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde $\Delta n^{TM}(\lambda)$ denkleminde yerine yazdığımızda

$$\Delta n^{TM}(iy) = \frac{2y}{\pi} \left\{ \varepsilon_1 I_n'(y) K_n(y) - \varepsilon_2 I_n(y) K_n'(y) \right\} \tag{4.2.27}$$

elde ederiz. $\Delta n^{TM}(i\infty)$ ise

$$\Delta n^{TM}(i\infty) = \frac{1}{\pi} \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \right\} \tag{4.2.28}$$

şeklindedir ve (4.2.27) ile (4.2.28)'ün oranı

$$\frac{\Delta n^{TM}(iy)}{\Delta n^{TM}(i\infty)} = \frac{2y}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left\{\varepsilon_1 I_n'(y)K_n(y) - \varepsilon_2 I_n(y)K_n'(y)\right\} \tag{4.2.29}$$

olarak elde edilir. (4.2.26) ve (4.2.29)'u (4.2.15)'de yazarsak

$$E = -\frac{v}{8\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} y^2 d_y \ln\left(\frac{4y^2}{\mu_1\varepsilon_1 + \mu_1\varepsilon_2 + \mu_2\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2}\left[\mu_1\varepsilon_1 I_n'(y)^2 K_n(y)^2 - \varepsilon_1\mu_2 I_n'(y)I_n(y)K_n'(y)K_n(y)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \mu_1\varepsilon_2 I_n'(y)I_n(y)K_n'(y)K_n(y) + \varepsilon_2\mu_2 I_n(y)^2 K_n'(y)^2\right]\right) \tag{4.2.30}$$

elde edilir. Pay ve payda $\varepsilon_2\mu_2$ ile bölünür ve (4.2.1) göz önüne alınırsa (4.2.30)'u

$$E = -\frac{v}{8\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} y^2$$
$$d_y \ln\left\{\frac{4y^2}{\varepsilon + \varepsilon^{-1} + 2}\left\{\left[I_n'(y)K_n(y)\right]^2 + \left[I_n(y)K_n'(y)\right]^2 - \left(\varepsilon + \varepsilon^{-1}\right)I_n(y)I_n'(y)K_n(y)K_n'(y)\right\}\right\} \tag{4.2.31}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ dir. (4.2.31)'e kısmi integrasyon uygularsak

$$E = \frac{v}{4\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} y$$
$$d_y \ln\left\{\frac{4y^2}{\varepsilon + \varepsilon^{-1} + 2}\left\{\left[I_n'(y)K_n(y)\right]^2 + \left[I_n(y)K_n'(y)\right]^2 - \left(\varepsilon + \varepsilon^{-1}\right)I_n(y)I_n'(y)K_n(y)K_n'(y)\right\}\right\} \tag{4.2.32}$$

elde ederiz.(4.2.32)'yi daha sade yazmak için Modified Bessel Fonksiyonlarının Wronskian değeri kullanabiliriz. Modified Bessel fonksiyonlarının Wronskian değeri

$$I_n(y)K_n'(y) - I_n'(y)K_n(y) = -\frac{1}{y} \tag{4.2.33}$$

şeklindedir. Ayrıca (4.2.33)

$$I_n(y)K_n'(y) + I_n'(y)K_n(y) = \left(I_n(y)K_n(y)\right)' \tag{4.2.34}$$

şeklinde de ifade edilebilir. (4.2.33) ve (4.2.34) göz önünde bulundurularak

$$E = \frac{v}{4\pi a^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} ydy \ln\left\{1-\xi^2\left[y\left(I_n(y)K_n(y)\right)'\right]^2\right\} \tag{4.2.35}$$

şeklinde yazılır. Burada $\xi = \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}$ şeklindedir. Böylece

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \tag{4.2.36}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E_n = \frac{v}{4\pi a^2}\int_0^{\infty} ydy \ln\left\{1-\xi^2\left[y\left(I_n(y)K_n(y)\right)'\right]^2\right\} \tag{4.2.37}$$

şeklindedir. (4.2.18) ve (4.2.19) asimptotik bağıntılardan dolayı (4.2.37)'deki integral $y \to \infty$ iken logaritmik olarak ıraksar. Ayrıca çok büyük n değerlerinde modifiye Bessel fonksiyonların uniform açılımı göz önüne alınırsa n üzerinden toplam ıraksar. Gerçekten [Bateman, 1953]

$$I_n(y)K_n(y) \approx \frac{1}{2}\frac{1}{(n^2+y^2)^{1/2}} \qquad n \to \infty \quad \text{iken} \qquad (4.2.38)$$

uniform asimptotik açılımın y 'ye göre türevini aldığımızda,

$$\frac{d}{dz}\left[I_n(y)K_n(y)\right] = -\frac{1}{2}\frac{y}{(n^2+y^2)^{3/2}} \qquad n \to \infty \quad \text{iken} \qquad (4.2.39)$$

elde ederiz. (4.2.38) ve (4.2.39)'i (4.2.37)'deki logaritmik ifadede yerine yazarsak

$$\ln\left\{1-\xi^2\left[y(I_n(y)K_n(y))'\right]^2\right\} = \ln\left\{1-\frac{\xi^2 y^4}{4(n^2+y^2)^3}\right\} \qquad n \to \infty \quad \text{iken} \qquad (4.2.40)$$

elde edilir. $\ln(1-x)$ 'in seri açılımı

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

(4.2.40) da kullanılırsa

$$\ln\left\{1-\frac{\xi^2 y^4}{4(n^2+y^2)^3}\right\} = -\frac{\xi^2 y^4}{4(n^2+y^2)^3} \qquad n \to \infty \quad \text{iken}$$

elde edilir. Bu sonucu (4.2.37) denkleminde yerine yazdığımızda

$$E_n = \frac{v}{16\pi a^2}\int_0^\infty y dy\left\{-\frac{\xi^2 y^4}{(n^2+y^2)^3}\right\} \qquad n \to \infty \quad \text{iken} \qquad (4.2.41)$$

olur ve $y = nz$ dönüşümüyle,

$$E_n = -\frac{v\xi^2}{16\pi a^2}\int_0^\infty \frac{z^5}{(1+z^2)^3}dz \qquad n \to \infty \qquad (4.2.42)$$

sonucu elde edilir. Böylece $n \to \infty$ iken

$$E_n\big|_{n\to\infty} \cong -\frac{\nu\xi^2}{16\pi a^2}\int_0^\infty \frac{z^5}{(1+z^2)^3}dz \equiv E^\infty \tag{4.2.43}$$

olur. Bu arada (4.2.43)'daki integralde ıraksaktır. Daha öncede belirttiğimiz gibi (4.2.36)' daki toplam ıraksaktır. Bu ıraksamaya neden olan toplamı sonlu bir değer haline getirmek için (4.2.36) denklemine Riemann Zeta fonksiyon tekniğini uygulamalıyız.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(E_n - E^\infty + E^\infty)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{E}_n + E^\infty\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0 \tag{4.2.44}$$

Burada $\overline{E}_n$ Casimir enerjisinin renormalize edilmiş kısmıdır.

$$\overline{E}_n = E_n - E^\infty \quad , \quad n = 0,\pm1,.... \tag{4.2.45}$$

Daha kesin bir sonuç elde etmek için $E^\infty\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0 = E^\infty(1+2\sum_{n=1}^{\infty}n^0)$ terimini hesaplamalıyız. ζ fonksiyonunun (2.2.29)tanımını göz önüne alınırsa [Bateman,1953]

$$E^\infty\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^0 = -\frac{\nu\xi^2}{16\pi a^2}\lim_{S\to0^+}\int_0^\infty\frac{z^{5-s}}{(1+z^2)^3}dz\left[2\zeta(s)+1\right]$$

$$= -\frac{\nu\xi^2}{16\pi a^2}\lim_{S\to0^+}\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{4}\right)\left[2\zeta'(s)s\right]$$

$$= -\frac{\nu\xi^2}{16\pi a^2}\lim_{S\to0^+}\left(\frac{1}{s}-\frac{3}{4}\right)\left[-\ln(2\pi)s\right]$$

$$= -\frac{\nu\xi^2}{16\pi a^2}\ln(2\pi) \tag{4.2.46}$$

sonucunu elde ederiz. Burada $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$ eşitliğini kullandık [Bateman,1953]. Böylelikle Casimir enerjisinin şu formunu elde ederiz.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{E}_n + \frac{v\xi^2}{16\pi a^2}\ln(2\pi) \tag{4.2.47}$$

Buradaki $\overline{E}_n$ için (4.2.45), (4.2.37) ve (4.2.43)'ü kullanarak

$$\overline{E}_n = \frac{v}{4\pi a^2}\left\{\int_0^\infty y dy \ln\left[1-\xi^2\sigma_n^2(y)\right] + \frac{\xi^2}{4}\int_0^\infty \frac{z^5 dz}{\left(1+z^2\right)^3}\right\} \tag{4.2.48}$$

ve

$$\overline{E}_{-n} = \overline{E}_n \qquad , \qquad n = 0,1,2,3,.... \tag{4.2.49}$$

elde edilir. (4.2.48)'teki $\sigma_n(y) = y(I_n(y)K_n(y))'$ şeklindedir. (4.2.48)'teki her iki İntegral de ıraksaktır. Şimdi bu ıraksaklığı sonlu bir toplama dönüştürelim. (4.2.48)'de ikinci terimde $n \neq 0$ için $z = \frac{y}{n}$ dönüşümü yapılırsa

$$\overline{E}_n = \frac{v}{4\pi a^2}\int_0^\infty y dy\left\{\ln\left[1-\xi^2\sigma_n^2(y)\right] + \frac{\xi^2}{4}\frac{y^4}{(n^2+y^2)^3}\right\} \qquad n = 1,2,... \tag{4.2.50}$$

olarak yazılır. Eğer (4.2.48)'de $n = 0$ alınırsa

$$\overline{E}_0 = \frac{v}{4\pi a^2}\int_0^\infty y dy\left\{\ln\left[1-\xi^2\sigma_0^2(y)\right] + \frac{\xi^2}{4}\frac{y^4}{\left(1+y\right)^3}\right\} \tag{4.2.51}$$

olur. Buradaki (4.2.50) ve (4.2.51)' deki integraller yakınsar. Çünkü $y \to 0$ için (bkz. (4.2.38))

$$I_n(y)K_n(y) \approx \frac{1}{2n}\frac{1}{\left(1+z^2\right)^{1/2}} \qquad n \neq 0 \tag{4.2.52}$$

bağıntısından dolayı

$$I_n(y)K_n(y) \to \frac{1}{2n} \tag{4.2.53}$$

dirr. Bu limitte

$$\sigma_0(y) \to 1$$

dir. Diğer yandan büyük y için [bkz. (4.2.18) ve (4.2.19)]

$$I_n(y) = \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \qquad K_n(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}e^{-y}$$

bağıntılarından dolayı

$$\sigma_n^2(y) \to \frac{1}{4y^2} \tag{4.2.54}$$

dir. Şimdi (4.2.50)'deki integralleri $n = 1,2,3,4,5$ için hesaplayalım. Bunun için

$$\overline{E}_n = \frac{\nu}{4\pi a^2}\left[\left\{\int_0^\infty y dy \ln\left[1-\xi^2\sigma_n^2(y)\right]\right\} + \left\{\int_0^\infty \frac{\xi^2}{4}\frac{y^5}{(n^2+y^2)^3}dy\right\}\right] \tag{4.2.55}$$

şeklinde yazalım ve

$$X = \int_0^\infty y dy \ln\left[1-\xi^2\sigma_n^2(y)\right] \tag{4.2.56}$$

$$Y = \int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{4} \frac{y^5}{(n^2 + y^2)^3} dy \tag{4.2.57}$$

integralleri hesaplayalım. (4.2.56) $\sigma_n(y)$

$$\sigma_n(y) = y \frac{d}{dy}\left[I_n(y) K_n(y)\right] \tag{4.2.58}$$

şeklindedir. Burada Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotiklerini kullanmalıyız. Bessel fonksiyonlarının uniform asimptotikleri [Abramowitz,1964]

$$I_n(nz) \approx I_n \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \frac{e^{n\tau}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{4.2.59}$$

$$K_n(nz) \approx K_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{e^{-n\tau}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{U_k(t)}{n^k}\right\} \tag{4.2.60}$$

şeklindedir. (4.2.59) ve (4.2.60)'u çarpıp (4.2.58)'de yerine yazıp $\sigma_n(y) \to \sigma_n(nz)$ dönüşümü yaptığımızda

$$\sigma_n(nz) = z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2n(1+z^2)^{1/2}} + \frac{(2U_2 - U_1^2)}{2n^3(1+z^2)^{1/2}} + \frac{(2U_4 - U_2^2 - 2U_1U_2)}{2n^5(1+z^2)^{1/2}} \right\} \tag{4.2.61}$$

elde ederiz. Buradaki U fonksiyonlarının t'ye bağlı değerleri

$$U_1(t) = \frac{1}{24}(3t - 5t^3)$$

$$U_2(t) = \frac{1}{1152}(81t^2 - 462t^4 + 385t^6)$$

$$U_3(t)=\frac{1}{414720}(30375t^3-369603t^5+765765t^7-425425t^9)$$

$$U_4(t)=$$

$$\frac{1}{3993120}(4465125t^4-9412676t^6+349922430t^8-446185740t^{10}+185910725t^{12})$$

şeklindedir ve $t=\frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}$ dir. Bunları (4.2.61)'de yazdığımızda

$$\sigma_n(nz)=-\frac{z^2}{2n(1+z^2)^{3/2}}+\frac{z^2}{n^3}\left(-\frac{0{,}1875}{(1+z^2)^{5/2}}+\frac{1{,}875}{(1+z^2)^{7/2}}-\frac{2{,}1875}{(1+z^2)^{9/2}}\right) \tag{4.2.62}$$

olur. (4.2.56) deki $\ln\left(1-\xi^2\sigma_n^2(y)\right)$ terimindeki $\xi^2\sigma_n^2(y)=x$ olarak alınırsa $\ln(1-x)$ açılımıyla

$$\ln(1-\xi^2\sigma_n^2(nz))=-\xi^2\sigma_n^2(nz)-\frac{\xi^4\sigma_n^4(nz)}{2}-\frac{\xi^6\sigma_n^6(nz)}{3} \tag{4.2.63}$$

olur. Öyleyse (4.2.62)'deki $\sigma_n(nz)$'i (4.2.63)'da yazıp sonucu (4.2.56)'de yerine yazarsak ve $y=nz$ dönüşümü kullanırsak

$$X=\int_0^\infty n^2 z dz\left\{-\frac{\xi^2z^4}{4n^2(1+z^2)^3}-\frac{\xi^2z^4}{n^4}\left(\frac{0{,}1875}{(1+z^2)^4}-\frac{1{,}875}{(1+z^2)^5}+\frac{2{,}1875}{(1+z^2)^9}\right)\right.$$

$$-\frac{\xi^2z^4}{n^6}\left(\frac{0{,}3515625}{(1+z^2)^5}-\frac{0{,}703125}{(1+z^2)^6}+\frac{4{,}3359375}{(1+z^2)^7}-\frac{8{,}203125}{(1+z^2)^8}+\frac{4{,}78515625}{(1+z^2)^9}\right)$$

$$-\frac{\xi^4z^8}{32n^4(1+z^2)^6}-\frac{\xi^4z^8}{2n^6}\left(\frac{1{,}09375}{(1+z^2)^9}+\frac{0{,}93750}{(1+z^2)^7}-\frac{0{,}9375}{(1+z^2)^{12}}\right)$$

$$-\frac{\xi^4z^8}{2n^8}\left(-\frac{1{,}0546875}{(1+z^2)^9}+\frac{0{,}52734375}{(1+z^2)^8}+\frac{6{,}5039}{(1+z^2)^{10}}-\frac{12{,}30468}{(1+z^2)^{11}}+\frac{7{,}17773}{(1+z^2)^{12}}\right)$$

$$\left.-\frac{\xi^6z^{12}}{192n^6(1+z^2)^9}-\right\}$$

olur. Burada $z=\tan\theta$ dönüşümü uygulayıp integral aldığımızda

$$X = -\frac{\xi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5\theta}{\cos\theta}d\theta + \frac{10\xi^2 - 3\xi^4}{960n^2} - \frac{28224\xi^2 - 7344\xi^4 + 720\xi^6}{15482880n^4} + 0\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{4.2.64}$$

elde edilir. Şimdi (4.2.57)'ü ele aldığımızda $y = n\tan\theta$ dönüşümü kullanırsak

$$Y = \frac{\xi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{n^5\tan^5\theta}{\left(n^2 + n^2\tan^2\theta\right)^3}nSec^2\theta d\theta = \frac{\xi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^5\theta}{\cos\theta}d\theta \tag{4.2.65}$$

sonucunu elde ederiz. (4.2.64) ve (4.2.65)'i (4.2.51)'de yerine yazdığımızda

$$\overline{E}_n\big|_{n\to\infty} \approx \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}\left\{\frac{10 - 3\xi^2}{960n^2} - \frac{28224 - 7344\xi^2 + 720\xi^4}{15482880n^4} + 0\left(\frac{1}{n^6}\right)\right\} \tag{4.2.66}$$

elde ederiz. Tüm bu işlemler $n \neq 0$ için yapıldı. Dolayısıyla Casimir Enerjisi

$$E = \overline{E}_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{E}n + \frac{v\xi^2}{16\pi^2 a^2}\ln(2\pi) \tag{4.2.67}$$

şeklindedir. (4.2.50) ve (4.2.51) de $n \geq 1$ için $\overline{E}_n$ ve $\overline{E}_0$ sonludur.

4.3 Dilute Compact Silindir ve İdeal İletken Silindirik Kabuk

Bu bölümde $\xi^2 \langle\langle 1$ ve $\xi^2 = 1$ durumlarını ele alacağız[Milton et al,1999]. Birinci durum dielektrik-diamanyetik dilute bir silindirin Casimir enerjisini verirken ikinci durum ise ideal iletken sonsuz ince silindiriksel kabuğun [DeRaad and Milton, 1981] Casimir enerjisini vermektedir.

Önce $\xi^2 \langle\langle 1$ durumunu ele alalım. Denklem (4.2.51) de yalnız ξ^2 ile orantılı terimler göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{E}}_0 &\cong \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}\int_0^\infty y dy\left[\frac{y^4}{4\left(1+y^2\right)^3}-\sigma_0^2(y)\right] \\ &\cong \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}(-0.490878)\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. $n\rangle 0$ için (4.2.66) denklemindeki ξ^2 ile orantılı terimleri ele aldığımızda yani temel asimptotik davranışları kullanarak $\overline{E}_n$'yi

$$\overline{E}_n \approx \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}\left(\frac{1}{96n^2}-\frac{7}{3840n^4}\right) \tag{4.3.2}$$

şeklinde hesaplayabiliriz. (4.3.1) ve (4.3.2)'ü (4.2.67) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}E &\cong \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}\left(\overline{E}_0+2\sum_{n=1}^{5}\overline{E}_n+\frac{1}{48}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{7}{1920}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{1}{4}\ln(2\pi)\right) \\ &= \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}\left(-0{,}490878+0{,}027638+0{,}003778-0{,}000007+0{,}459469\right) \\ &= \frac{v\xi^2}{4\pi a^2}(0.000000)\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Dolayısıyla içinde ve dışında aynı v hızına (v elektromanyetik dalga hızı) sahip bir silindirin Casimir Enerjisi sıfır sonucunu vermiştir. Bu şaşırtıcı bir sonuçtur. Çünkü aynı özelliklere sahip küre için bulunan Casimir Enerjisi pozitiftir [Milton et al,1999]. [Brevik and Kolbenstvedt, 1982,1983], [Milton and Y. J. Ng, 1997], [Brevik et al,1998]

$$E_{ball} = \frac{3}{64a}\xi^2 = 0{,}046875\frac{\xi^2}{a} \tag{4.3.4}$$

Ayrıca Casimir Enerjisinin değeri genellikle sıfır olarak bulunmuyor.

$\xi^2 = 1$ durumu özel bir durumdur. Çünkü bu durumda ayrıca $v = 1$ alınırsa elde edilen bağıntı ideal iletken silindiriksel kabuk için Casimir enerjisini vermektedir. (4.2.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overline{E}_0 = \frac{1}{4\pi a^2}\left(-0{,}6517\right) = -0{,}05186\frac{1}{a^2} \tag{4.3.5}$$

elde edilir. (4.2.67) denklemindeki $2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n$ toplamı uniform asimptotik yaklaşımlarda başlıca iki terimin kullanımıyla hesaplanabilir.Sonuç

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n \approx \frac{1}{4\pi a_2}\left[\frac{7}{480}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{5}{1792}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi a^2}0{,}0210 = 0{,}0018\frac{1}{a^2} \tag{4.3.6}$$

olarak bulunur. Bu toplam daha doğru bir şekilde hesaplayarak

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n \approx \frac{1}{4\pi a^2}\frac{1}{2}0{,}0437 = \frac{1}{4\pi a^2}0{,}0218 = 0{,}00174\frac{1}{a^2} \tag{4.3.7}$$

bulunmuştur [DeRaad and Milton, 1981]. (4.3.5) ve (4.3.7)'i (4.2.67) denkleminde yerine yazarak ideal iletken silindiriksel kabuğun Casimir Enerjisi

$$E_{shell} = \frac{1}{4\pi a^2}\left(-0{,}1704\right) = -0{,}01356\frac{1}{a^2} \tag{4.3.10}$$

olarak elde edilir.

SONUÇ

Casimir enerjisi hesaplanırken ıraksamaların ortadan kaldırılması ve kontrolü için birçok metot ortaya çıkar.

Bu çalışmada kullandığımız mod toplama metodu kompleks frekans düzleminde kontur integrasyonu kullanılan yeni bir metottur.

Bu çalışmada öncelikle klasik öz frekanslar için silindir yüzeyinde sınır koşullarıyla kaynaksız boş uzayda Maxwell denklemlerini çözdük. Bu öz frekanslar çalışmamızın temel noktasını oluşturmaktadır.

Çalışmamızda kullanılan teknikler ıraksaklığın ortadan kaldırılması amacıyla kullanılmıştır. Bu teknikler sırasıyla kontur integrasyonu ve zeta fonksiyonu regularizasyon tekniğidir. Bu teknikler yardımıyla ilk olarak silindirin içinde ve dışında elektromanyetik dalgaların hızının aynı olduğunu varsayarak Casimir enerjisini sıfır olarak hesapladık. ve bu sonucun küre için bulunan pozitif Casimir enerjisiyle zıt olduğunu gördük.

Daha sonra aynı yöntemler yardımıyla ideal iletken sonsuz silindirik kabuk için Casimir enerjisi ele alınmaktadır.

KAYNAKLAR

Abramowitz, **M**. and **Stegun, I**. **A**., 1964, 'Handbook of Mathematical Functıons' Washıngton, D.c.,p.366

Arfken, G., 1970, 'Mathenatical Methods For Physıcsts', Acedemic Pres, New York, p.91-92, 478-521

Balcı, M, 1997, 'Matematik Analiz Cilt II.' Ankara, syf.286-292

Bateman, H, 1953, 'Higher Trascendental Functions', McGraw-Hill Book Company, p.10

Bayın, S. **Ş**. ,2000 , 'Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler' Ankara, syf. 129-150

Bell, W.**W**.,1967, 'Specials Functions for Scientists and Engineers' , London,p.92-133, 223

I. Brevik, V. V. Nesterenko and **I. G. Pirozhenko ,** 1998 , **'**Direct mode summation for the Casimir energy of a solid ball**'** *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 8661-8668 doi:10.1088/0305-4470/31/43/009

Brevik, I., Kolbenstvedt, H., 1982, 1983, 'Casimir stress in a solid ball with permittivity and permeability' Ann. Phys. (N.Y.) 143, 179; 149,237

Bordag, M., **Mohideen, U**., **Mostapanenko, V.M.**, 2001, 'New Developments in the Casimir Effect', Phys. Rep. 353, 1-205,

Boyer. T. H., 1968, 'Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle'Phys. Rev.,174:1764

Casimir, H. B. G. , 1948, 'On the attraction between two perfectly conducting plates' Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 51:793-795

Cavero-Pelaez, I., Milton, K. A., 2004**, '**Casimir Energy for a Dielectric Cylinder' hep-th/0412135, Ann. Phys. (N.Y.) 320**,** 108-134

Davies, B.,1972 , 'Quantum electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell ' J. Math. Phys., 13,1324

DeRaad, **L**. **L**., **Jr**. and **Milton**, **K**., 1981,'Casimir Self-Strees on a Perfectly Conducting Cylindrical Shell' Ann. Phys. (N.Y) 136, 229

Gosdzinski, P., **Romeo, A**., 1998,'Energy of the vacuum with a perfectly conducting and infinite cylindrical surface' Phys. Letters B 441, 265-274,

Itzykson, V, Zuber, J-B. , 1987, 'Quantum Field Theory', McGraw-Hill İnternational Editions, p. 32, 47, 108, 138

Jackson, J:D, 1962, 'Classical Electrodynamıcs', Colorado, p.617-618

Karaoğlu, B , 1994, 'Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler' İstanbul, syf. 149-170

Lambiase, G., Nesterenko, V.V., Bordag, M., 2006, 'Casimir Energy of a Ball and Cylinder in The Zeta Function Technique' J.Math.Phys. 40, 6254-6265

Milton, K.**A**, **Ng, J. Y.,**1997,'Casimir Energy for a Spherical Cavity in a dielectric' Phys. Rev. E55, 4207

Milton, K.**A**, **Nesterenko, A**.**V**., **Nesterenko, V**.**V**. , 1999, 'Mode-By mode summation for the zero elektromagnetik energy of an infinite cylinder', Phys. Rev. D 59,105009

Milton, K. A., 2004, 'The Casimir effect :Recant controversies and progress'Review Article, Oklahama Center for High Energy phiysics and Department of Physics and Astronomy, hep-th/0406024, invited review article, J. Phys. A. 37**,** R209-277

Milton, K. A., 2006, 'The Casimir effect : Physical Manifestations of Zero-point Energy ', Oklahama Center for High Energy phiysics and Department of Physics and Astronomy http:arxiv.org/abs/hep-th/9901011

Nesterenko, V.V. and **Pirozhenko, I.G**., 1997 ,'Simple Method for Calculating the Casimir Energy for a Sphere'', Phys. Rev. D57,1284

Nesterenko, V.V., Pirozhenko, I.G., 2006, 'Casimir energy of a compact cylinder under the condition $\varepsilon\mu = c^{-2}$ ' Phys.Rev. D 60 ,125007

Romeo, A., Milton, K. A., 2006**, '**Casimir Energy for a Purely Dielectric Cylinder by the Mode Summation Method' hep-th/0504207, Phys. Lett. B. 621**,** 309

Sakurai, J.J, 1967, 'Advanced Quantum Mechanics', The Enrico Fermi Institute for Nuclear Studies and the Department of Physics, University of Chicago, syf.7, 75-78

Schwinger J., DeRaad L.L., Jr., and **K. A. Milton.,** 1978, Ann. Phys. (N. Y.) 115:1

Sparnaay M. J. , 1958, 'Measurement of Attractive Forces Between Flat Plates' Physica 24, 751-764

Stratton, J. **A**., 1941, 'Electromagnetic Theory, McGraw-Hill', New York, p.524-526